Universitetet i Oslo
Matematisk Institutt

En ekte involusjon på Waldhausens 'rigid-tube'-avbildning

Sverre André Lunøe-Nielsen

Skriftlig del av Cand. Scient. -graden i matematikk

2. mai 2000

Innhold

Innledning

La X være en kompakt mangfoldighet. Dersom man er interessert i geometrisk topologi, kan man blant annet studere passende kodimensjon null undermangfoldigheter M av sylinderen $X \times I$, kalt partisjoner over X. Slike mangfoldighetsoppdelinger av sylinderen kan tenkes på som punkter i et rom (simplsiell mengde). Et slikt rom kalles rommet av partisjoner over X. En slik konstruksjon generaliserer andre lignende konstruksjoner.

Eksempel 1 *Dersom vi insisterer på at undermangfoldigheten $M \subset X \times I$ er en h-kobordisme fra $X \times \{0\}$, får vi en modell for h-kobordismerommet over X. Dette betegnes ofte med $H(X)$.*

Eksempel 2 *Tuberommet $T^m(X)$ fremkommer ved at vi krever at $M \subset X \times I$ ser ut som et hankelegeme med én hank av indeks m.*

Waldhausen [10] knytter slike rom av partisjoner over X til algebraisk K-teori av rommet X, eller $A(X)$. En slik sammenheng med algebraisk K-teori gjør det mulig å overføre informasjon herfra til informasjon om partisjonsrommene.

Et spesialtilfelle av konstruksjonene vises i [10] når X er en disk D^{m+n}. Da har vi et diagram

$$H^{DIFF}(D^{m+n}) \longrightarrow T^m(D^{m+n}) \longrightarrow BG \tag{1}$$

som approksimerer en fibrering opp til homotopi når m og n vokser mot uendelig. Her betyr superskriptet $DIFF$ at alle mangfoldighetene i konstruksjonen er glatte. Rommet BG er det klassifiserende rommet til monoiden av stabile homotopiekvivalenser av sfærer. Motivert av ønsket om å øke disse indeksene, defineres stabilseringsavbildninger. En for å øke m og en annen for å øke n. Problemet med disse er at de kun er kompatible opp til homotopi.

I det foreliggende arbeidet skal vi vise hvordan vi kan forbedre konstruksjonene over, og definere eksplisitte stabiliseringsavbildninger i begge retninger. Vi vil så vise hva vi mener med å passere til grensen over begge på likt.

Minst like viktig er at vi blir i stand til å definere en involusjon på partisjonsrommene som er kompatibel med denne stabiliseringen. Involusjonen kommer fra virkningen gitt ved å snu sylinderen $X \times I$ opp-ned. Dette gjør at vi får en ekte involusjon på grensen. Klassisk [9] har dette vært en involusjon i homotopikategorien. En slik involusjon er tilstrekkelig så lenge man for eksempel ser på rasjonal homotopi hvor tallet 2 er invertert. For informasjon om 2-primær homotopi er man nødt til å ha en ekte involusjon på disse rommene.

Motivasjon fra geometrisk topologi

Gitt en differensiabel mangfoldighet X. Rommet $DIFF(X)$ av diffeomorfier på X utgjør en gruppe ved komposisjon som man ut i fra et geometrisk ståsted er interessert i å få informasjon om.

Det er en sterk analogi mellom synspunktet over og mer klassisk geometri: De glatte automorfiene av en mangfoldighet kan betraktes som de glatte symmetriene av mangfoldigheten, i likhet med gruppen av symmetrier på geometriske figurer, for eksempel et regulært n-gon.

Anta nå at X er en Riemannsk mangfoldighet. En glatt selvavbildning på X som er avstandsbevarende med hensyn på den valgte metrikken, kalles en isometri av X. Vi skriver $ISO(X)$ for rommet av slike. Isometriene er spesielt diffeomorfier, og vi har en inklusjon $ISO(X) \subset DIFF(X)$. Studiet av dette rommet har vist seg å gi interessante resultater:

Teorem 1 (Myers-Steenrod, 1939) *Gruppen av isometrier av en Riemannsk mangfoldighet er en Lie-gruppe.*

I tillegg til gruppen av diffeomorfier, har vi gruppen av topologiske automorfier $TOP(X)$ og monoiden av selvavbildninger av X som er homotopiekvivalenser. Vi betegner det siste gruppen med $G(X)$. Dersom X er en stykkevis lineær mangfoldighet, kan vi også snakke om gruppen $PL(X)$ som skal være de stykkevis lineære automorfiene. Et av poengene her er at dette er topologiske grupper.

Alle disse rommene sitter i følgende diagram, hvor avbildningene er definert ved å glemme struktur.

$$\begin{tikzcd}
ISO(X) \arrow[r] & DIFF(X) \arrow[r] & TOP(X) \arrow[r] & G(X) \\
 & & PL(X) \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Spørsmålet om hvordan rommet av diffeomorfier ser ut viser seg imidlertid å være en hard nøtt. Teoremet over sier at rommet av isometrier er en mangfoldighet. Rommet av diffeomorfier blir på den annen side raskt uendeligdimensjonalt. Skal vi ha noe håp om å få vite hvordan slike rom ser ut, må vi nøye oss med homotopitypen.

Approksimering av automorfirom

Ved å være mer generell i definisjonen av $DIFF(X)$, kan vi definere rommet av såkalte 'blokk-diffeomorfier' på X. Rommet av diffeomorfier på X er inneholdt i rommet av blokk-diffeomorfier, som vi betegner med $\widetilde{DIFF}(X)$. Vi har følgende fibersekvens:

$$DIFF(X) \longrightarrow \widetilde{DIFF}(X) \longrightarrow \frac{\widetilde{DIFF}(X)}{DIFF(X)} \tag{2}$$

Tilsvarende defineres også blokk-utgaver av de andre automorfigruppene. Disse er som i det differensiable tilfellet større rom. Da har vi følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
DIFF(X) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{DIFF}(X) \arrow[d] \\
TOP(X) \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{TOP}(X) \arrow[d] \\
G(X) \arrow[r, "\simeq"] & \widetilde{G}(X)
\end{tikzcd}$$

De horisontale avbildningene er inklusjoner og de vertikale er glemsomme. Kirurgiteori gir informasjon om det nederste kvadratet, blant annet gjennom en serie eksakte sekvenser. I tillegg kan man fra kiriurgiteori få informasjon om $\widetilde{DIFF}(X)$ ut i fra kjennskap til blant annet rommet $G(X)$.

I lys av fibersekvensen (2), vil det da være mulig å få informasjon om $DIFF(X)$ dersom man kjenner rommet $\widetilde{DIFF}(X)/DIFF(X)$.

Stabile tilnærminger

Vi kan tenke på $\widetilde{DIFF}(X)/DIFF(X)$ som 'forskjellen' mellom blokk-diffeomorfiene og de vanlige diffeomorfiene. Hatcher [3] viste at man kan konstruere en spektralsekvens som konvergerer mot homotopigruppene til $\widetilde{DIFF}(X)/DIFF(X)$. For å regne ut E^2-leddet i denne sekvensen trenger man informasjon om rommet av konkordanser på X og virkningen på dette av en spesiell involusjon.

Rommet av konkordanser på X betegnes med $C(X)$. Nært knyttet til $C(X)$ er det før nevnte rommet av h-kobordismer over X. Det finnes en homotopiekvivalens $C(X) \xrightarrow{\simeq} \Omega H(X)$, til løkkerommet av $H(X)$.

Hatcher [3] konstruerer stabiliseringsavbildninger $C(X) \longrightarrow C(X \times I)$ av konkordansrom og viser at det stabile konkordansrommet $\mathcal{C}(X)$ er en homotopifunktor. Tilsvarende kan man stabilisere h-kobordismerommet $H(X) \longrightarrow H(X \times I)$. Man betegner ofte grensen med $\mathcal{H}(X)$, ofte kalt *det stabile h-kobordismerommet over X*.

Teorem 2 (Weiss-Williams, 1988) *Det finnes et spektrum* $\Omega\underline{\underline{Wh_s}}(X)$ *med en involusjon, og en avbildning*

$$\frac{\widetilde{DIFF}(X)}{DIFF(X)} \longrightarrow \Omega^\infty(\Omega\underline{\underline{Wh_s}}(X)_{h\mathbb{Z}/2})$$

som er $(dimX/3 - c)$*-sammenhengende. Her er* c *en konstant.*

Dette er et viktig resultat av mange grunner, men for oss er det spesielt interessant på grunn av følgende faktum. Dersom $\pi_1 X = 0$ kan vi nemlig ta $\mathcal{H}(X)$ som modell for det underliggende rommet $\Omega^\infty\Omega\underline{\underline{Wh_s}}(X)$. Merk at for å ta homotopiorbits som i teoremet, er det ikke tilstrekkelig med en involusjon kun opp til homotopi.

Metoder for studiet av det stabile h-kobordismerommet

Gjennomgangen over er ment å gi en motivasjon til å studere rommet av h-kobordismer over en mangfoldighet X, ut i fra ønsket om å få bedre forståelse av den topologiske gruppen av diffeomorfier på X. Et av de viktige resultatene i [10] er konstruksjonen av en avbildning $rt : Gr_m(\mathbb{R}^{m+n}) \longrightarrow T^m(D^{m+n})$ fra Grassmann-mangfoldigheten til tuberommet. Waldhausen kaller avbildningen 'rigid tube'-avbildningen (derav forkortelsen rt), og er geometrisk definert. Det viser seg at denne avbildningen sammensatt med den andre avbildningen i fibreringen (1) approksimerer i et stabilt område den kjente J-avbildningen $BO \longrightarrow BG$. Homotopifiberen til denne er ekvivalent med rommet G/O og som avbildning av homotopifibre, oppnår man en avbildning $G/O \longrightarrow H(D^{m+n})$.

Mye av arbeidet i denne oppgaven er konsentrert om konstruksjonen av en lignende avbildning fra Grassmannen til tuberommet slik at den er kompatibel med stabilisering. Denne avbildningen vil, på grunn av manglende oppfinnsomhet, gå under navnet tubeavbildningen. Dessuten vil mange av konstruksjonene vi gjør være motivert av at vi ønsker å definere en ekte involusjon på de stabile partisjonsrommene.

Ved å velge en involusjon på Grassmann-mangfoldighetene, oppnår vi at tubeavbildningen er involutiv. Teorem 8 gir et kortfattet sammendrag av hva vi oppnår til slutt.

Kapitteloversikt

Her er en oversikt over kapitlene og hva som gjøres i dem: Arbeidet er fordelt på 10 kapitler, hvor det første gir en definisjon av Waldhausens rom av partisjoner. I tillegg vil det her bli gjengitt noen resultater fra [10], som forteller oss hvorfor disse rommene er interessante.

Resultatene er stabile, og i kapittel 2 defineres en smule mer generell utgave av stabiliseringsavbildningene enn de som fantes fra før. Vi viser her noen egenskaper ved disse avbildningene og at de er i samme homotopiklasse som Waldhausens opprinnelige.

En del tekniske problemer oppstår som følge av stabilisering. For det første er det vanskelig å se om våre nye objekter virkelig er mangfoldigheter. Dette er hva kapittel 3 handler om. Dersom vi jobber med glatte mangfoldigheter, påfører stabiliseringsavbildingene singulariteter i mangfoldighetsstrukturen. Kapittel 4 forteller hva som må gjøres for å bøte på dette.

Vi ønsker så å ta den doble grensen over begge stabiliseringene. For å gi mening til dette dreier kapittel 5 seg om avbildningsteleskop. Det virkelige arbeidet blir så gjort i kapittel 6 og 7 som omhandler den doble grensen i henholdsvis det stykkevis lineære- og det glatte tilfellet. Her defineres eksplisitt et sekvensielt grensesystem av partisjonsrom hvis grense har den riktige homotopitypen.

I kapittel 8 defineres så endelig en involusjon på konstruksjonene som er gjort. Kapittel 9 retter så fokus mot Waldhausens 'rigid-tube'-avbildning, og viser at også denne kan konstrueres slik at den er kompatibel med involusjonen.

Til slutt samles trådene i kapittel 10, hvor en oppsummering og konklusjon gis.

1 Waldhausens Partisjonsrom

I dette kapittelet vil vi definere hva som menes med et rom av partisjoner over en kompakt mangfoldighet X, og gjengi noen av de resultater som dukker opp i [10]. Vi kommer til å bruke forkortelsen CAT for kategoriene TOP, PL eller $DIFF$. Det viser seg at konstruksjonene for TOP og PL på mange områder skiller seg fra $DIFF$, og det vil etterhvert bli behov for å diskutere disse hver for seg.

1.1 Simplisiell mengde av partisjoner

Gitt en kompakt CAT-mangfoldighet X og reelle tall $a < a' < b' < b$. Vi vil anta, av grunner som blir klarere etter hvert, at vi har likheten $b - b' = a' - a$. Vi betegner det lukkede intervallet $[a, b]$ med I. La $M, F, N \subset X \times I$ være CAT undermangfoldigheter, og la $t \in [a', b']$.

Definisjon 1 *Mangfoldighetstrippelet (M, F, N) kalles en partisjon over X av høyde t over en omegn om ∂X dersom*

(i) M og N er kodimensjon-0 undermangfoldigheter slik at $M \cup N = X \times I$

(ii) F er en kodimensjon-1 undermangfoldighet slik at $F = M \cap N$

(iii) $X \times [a, a'] \subset M$ og $X \times [b', b] \subset N$

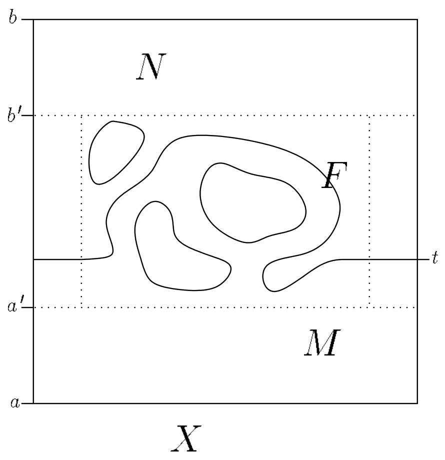
(iv) Det eksisterer en omegn $U \subset X$ om ∂X slik at $M \cap (U \times I) = U \times [a, t]$.

Legg merke til at mangfoldighetsoppdelingen (M, F, N) er bestemt av M alene siden N er tillukningen til komplementet til M og $F = M \cap N$. Vi kaller F for fronten til partisjonen. Merk videre at omegnen U ikke er en del av dataene til en partisjon, mens at høyden t er det. Vi krever altså kun at det skal eksistere en omegn om randen til X slik at partisjonen er standard av en valgt høyde t over denne. Dersom $\partial X = \emptyset$ er det klart at t er likegyldig, men det er teknisk fordelaktig til senere bruk å ha valgt høyden på forhånd. Se figur 1.

Vi ønsker nå å definere en simplisiell mengde av partisjoner, og trenger derfor følgende formulering: La $E \xrightarrow{\pi} \Delta^q$ være produktbunten $\Delta^q \times (X \times I) \xrightarrow{pr} \Delta^q$. La (A, C, B) være undermangfoldigheter av E og for $U \subset \Delta^q$, la $A_U := A \cap \pi^{-1}(U)$. Definér B_U, C_U og E_U tilsvarende.

Definisjon 2 *En lokalt triviell q-parameter familie av partisjoner skal være et slikt mangfoldighetstrippel (A, C, B) med følgende egenskaper:*

(i) (A_ξ, C_ξ, B_ξ) er en partisjon over X for alle $\xi \in \Delta^q$



Figur 1: En partisjon over X

(ii) Det finnes en overdekning $\{U_\alpha\}_\alpha$ av Δ^q med den egenskapen at for hver α eksisterer det kommuterende diagram

$$\begin{tikzcd}
A_{U_\alpha} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[d] & & U_\alpha \times M \arrow[d] \\
E_{U_\alpha} \arrow[rr, "\phi_\alpha", "\cong"'] \arrow[dr, "\pi|_{E_{U_\alpha}}"'] & & U_\alpha \times X \times I \arrow[dl, "pr_1"] \\
& U_\alpha &
\end{tikzcd}$$

hvor isomorfiene er CAT-isomorfier og M tilhører en partisjon (M, F, N) over X.

Legg merke til at egenskap (i) er nødvendig slik vi har formulert oss. Vi kan ha punktvise oppdelinger (M_ξ, F_ξ, N_ξ) som ikke oppfyller krav (iii) og (iv) i definisjon 1, men som likevel kan sendes på (M'_ξ, F'_ξ, N'_ξ) som oppfyller disse betingelsene. Kort sagt er egenskapene (i) og (ii) invariante under homeomorfier, mens (iii) og (iv) selvsagt ikke er det. Merk i tillegg at vi tillater at partisjonene kan variere i høyde ved randen.

Nå kan vi definere den simplisielle mengden $P(X)$, der 0-simpleksene er partisjoner (M, F, N) over X og q-simpleksene er lokalt trivielle q-parameter familier av partisjoner. Fasettavbildningene defineres ved å la den i'te fasetten til et q-simpleks være tilbaketrekning av fiberbunten $E \longrightarrow \Delta^q$ over inklusjonen $\Delta^{q-1} \hookrightarrow \Delta^q$ av den i'te fasetten i Δ^q. Degenerasjonsavbildningene dannes på samme måte ved tilbaketrekning over projeksjonen $\Delta^q \xrightarrow{pr_i} \Delta^{q-1}$ av Δ^q på sin i'te fasett.

1.2 En annen beskrivelse av lokal trivialitet

La nå $CAT = DIFF$ eller PL. La X og I være som før. Anta at (A, C, B) er CAT-undermangfoldigheter av $E = \Delta^q \times X \times I$ slik at

(i) (A_ξ, C_ξ, B_ξ) er en partisjon over X for alle $\xi \in \Delta^q$

(ii) Avbildningen $\pi : C \longrightarrow \Delta^q$ indusert av projeksjonen er en CAT-submersjon. Se [5], side 59 for en definisjon.

Vi ser altså på en mangfoldighetsoppdeling av totalrommet E som før, hvor det andre kravet til lokal trivialitet er byttet ut med noe tilsynelatende svakere. I stedenfor å kreve at det lokalt finnes parametriserte familier av automorfier av totalrommet som trivialiserer mangfoldighetsoppdelingen ber vi heller om at projeksjonen ned på Δ^q restriktert til C skal være en submersjon.

Lemma 1 *Oppdelingen (A, C, B) er en lokalt triviell q-parameter familie av partisjoner over X.*

Bevis: Siden hver fiber C_ξ er kompakt og π er en lukket avbildning (C er kompakt og Δ^q er Hausdorff), følger det av (ii) at $\pi : C \longrightarrow \Delta^q$ er en lokalt triviell buntprojeksjon. (Se [5], side 59.) La nå $\xi_0 \in \Delta^q$ og velg en åpen trivialiserende omegn $U \subset \Delta^q$ om ξ_0. Vi kan da velge en fibervis trivialisering ϕ slik at

$$\begin{tikzcd} C_U \arrow[rr, "\phi", "\cong"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times C_{\xi_0} \arrow[dl, "pr_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

kommuterer. Her er $C_U = \pi^{-1}(U)$ og $C_{\xi_0} = \pi^{-1}\xi_0$ som før. Vi kan anta, ved å begrense U til en mindre omegn, at U er en konveks delmengde av Δ^q.

Se nå på sammensetningen

$$H : U \times C_{\xi_0} \xrightarrow{\phi^{-1}} C_U \subset E_U$$

Siden $pr_1 = \pi \circ H$, er H på formen $H(\xi, p) = (\xi, g(\xi, p))$ for en $g : U \times C_{\xi_0} \longrightarrow X \times I \cong E_\xi$. Velg nå en CAT familie CAT-avbildninger $f_s : U \longrightarrow U$ slik at $f_0 = id_U$ og $f_1 \equiv \xi_0$. (En slik familie kan vi lett konstruere siden U er konveks.)

La så $H_s : U \times C_{\xi_0} \longrightarrow E_U$ være avbildningen

$$H_s(\xi, p) = \big(\xi, g(f_s(\xi), p)\big)$$

og se på sammensetningen $G_s := H_s \circ \phi$. Da er det klart at hver G_s er en embedding for $s \in [0,1]$. Videre ser vi at G_0 er inklusjonen $C_U \subset E_U$ og G_1 er sammensetningen $C_U \xrightarrow{\cong} U \times C_{\xi_0} \subset E_U$.

Vi har med andre ord konstruert en isotopi av inklusjonen $C_U \subset E_U$ til inklusjonen av den 'utrettede' $C_U \cong U \times C_{\xi_0} \subset E_U$. Det er selvfølgelig et viktig poeng at denne isotopien er fibervis over $U \subset \Delta^q$. For å fullføre beviset trenger vi å utvide G_s til en fibervis ambient isotopi. Da vil G_1 gi opphav til en fibervis automorfi av E_U som trivialiserer familien (A, C, B) over U. (Se definisjon 2.)

Dersom vi er i det glatte tilfellet er det kjent at vi kan utvide isotopien til en ambient isotopi fibervis. Se for eksempel [6].

I tilfellet $CAT=PL$, kan vi bruke addendum 2 til teorem 2 fra [4] for å sikre oss at utvidelsen er fibervis. Vær klar over at embeddingen oppfyller hypotesen i teoremet om lokal trivialitet siden embeddingen $C_U \subset E_U$ er randen til en kodimensjon-0 mangfoldighet.

$\square$

1.3 En simplisiell kategori

Vi kan innføre mer struktur til $P(X)$ og danne en simplisiell kategori som følger. Anse alle partisjoner over X som objektene i en kategori der det finnes en morfisme $(M, F, N) \longrightarrow (M', F,' N)'$ hvis og bare hvis $M \subset M'$. La $hP(X)_0$ være underkategorien bestående av de samme objektene, hvor vi i tillegg krever at inklusjonene $F \hookrightarrow (M' \setminus int\ M) \hookleftarrow F'$ begge er homotopiekvivalenser. Dersom $(M, F, N) \longrightarrow (M', F', N')$ og $F \cap F' = \emptyset$ er vi i situasjonen hvor $M' \setminus int\ M$ er en h-kobordisme mellom F og F'.

Ved å generalisere til lokalt trivielle familier av partisjoner defineres $hP(X)$ som en simplisiell kategori. Vi kan derfor tenke på $P(X)$ som objektmengden til $hP(X)$ og vi får en naturlig inklusjon $P(X) \subset hP(X)$.

1.4 Hankenes inntog og sentrale teoremer

Vi vil nå fokusere på en spesiell veikomponent av $hP(X)$. For å spesifisere hvilken skal vi beskrive en spesiell partisjon. La

$$M_k^m = (X \times [a, a']) \cup (\text{ k trivielle hanker av indeks } m)$$

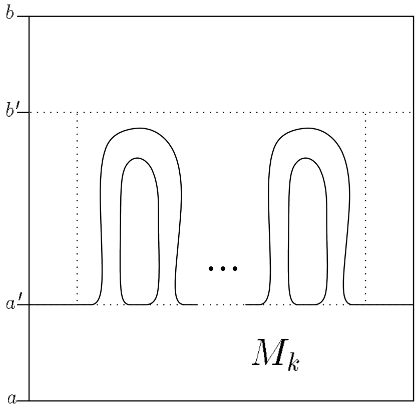
Se figur 2. At en hank er triviell og har indeks m skal i denne sammenhengen bety følgende: Anta at $r = dimX \geq m$ og la $h : D^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{r-m} \times [0, +\infty)$ være embeddingen $h(x) = (x, 0, 1 - \|x\|)$, der $\|-\|$ er den euklidske metrikken i $\mathbb{R}^m$. Velg nå en kraveomegn $T \subset \mathbb{R}^r \times [0, +\infty)$ om $im(h)$ slik at $T \cong$

$D^m \times D^{r-m}$ og $T \cap \mathbb{R}^r \times \{0\} \cong h(\partial D^m) \times D^{r-m}$. Anta nå at $U \subset X$ er en kartomegn isomorf med $\mathbb{R}^r$. Da er $U \times (a' - \epsilon, a' + \epsilon) \cong \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}$. Vi sier at en hank er triviell av indeks m dersom det finnes en slik kartomegn U slik at den er inneholdt i, og sammenfaller med $im(h)$ i $U \times [a', a' + \epsilon)$.

Definisjon 3 *$hP_k^m(X)$ er veikomponenten til $hP(X)$ som inneholder partisjonen (M_k^m, F_k^m, N_k^m). $P_k^m(X)$ er objektmengden til den simplisielle kategorien $hP_k^m(X)$.*

Bemerkning: Dersom $\pi_1(X) = 0$ kunne vi like gjerne ha definert $P_k^m(X)$ som veikomponenten til $P(X)$ som inneholder den spesielle partisjonen. Generelt finnes det ikke en 1-parameter familie partisjoner for alle h-morfismer i $hP(X)$.

Noen av partisjonsrommene er lett å gjenkjenne. Her er to eksempler:



Figur 2: En partisjon med k trivielle hanker

Eksempel 3 *Dersom vi ser på $P_0^m(X)$ er vi interessert i objektmengden til veikomponenten av $hP_0^m(X)$. (Hankeindeksen m er her uten betydning.) Men et q-simpleks er her en lokalt triviell q-parameter familie partisjoner over X med følgende egenskap: Hver partisjon (M, F, N) i familien er slik at M utgjør en h-kobordisme mellom $X \times \{0\}$ og fronten F. Men dette er en beskrivelse av rommet $H(X)$ av h-kobordismer over X. Vi vil i fremtiden ta $P_0^m(X)$ som modell for $H(X)$.*

Eksempel 4 *La $\Delta^q \times (M_0^m, F_0^m, N_0^m)$ være den konstante q-parameter familien partisjoner over X, hvor $M_0 = X \times [a, a']$ som før. Dersom $hP_0^m(X)_q$*

betegner kategorien av q-simplekser i $hP_0^m(X)$, ser vi at pr. definsjon er q-paramter familien over et initielt objekt. Med andre ord er $hP_0^m(X)$ en simplisiell kategori med et initielt objekt i hver grad, og dermed kontraktbel.

Velg nå en krave om randen til X. Vi kan da danne en inklusjon $P_k^m(X) \hookrightarrow P_{k+1}^m(X)$ ved å feste en hank av indeks m på M-delen av partisjonen ute ved kraven. Den nye partisjonen vil være standard av samme høyde som den gamle, men over en mindre omegn om randen. Ved å fortsette dette kan vi gi mening til grensen over k. Vi kan danne et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd} P_k^m(X) \arrow[r] \arrow[d] & hP_k^m(X) \arrow[d] \\ \underset{q}{hocolim}\ P_q^m(X) \arrow[r] & \underset{q}{hocolim}\ hP_q^m(X) \end{tikzcd} \tag{3}$$

for alle k, der alle avbildningene er inklusjoner.

Teorem 3 (Waldhausen) *Diagrammet over er homotopikartesisk, for alle k, i et stabilt område avhenging av $(dimX) - m$ og m. Man kan gi de to nederste rommene en Γ-romsstruktur, og etter gruppekomplettering er diagrammet fremdeles homotopikartesisk i samme stabile område.*

Noen begreper i teoremet fortjener å bli forklart: Gitt et kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd} \tag{4}$$

La A' være homotopipullback av diagrammet $C \longrightarrow D \longleftarrow B$. En egenskap med A' er at det finnes avbildninger $A \longrightarrow A'$ og $C \longleftarrow A' \longrightarrow B$, slik at følgende diagram er kommutativt opp til homotopi:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & A' \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ & C \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

At diagrammet (4) er homotopikartesisk opp til grad N for en $N \in \mathbb{N}$, betyr at avbildningen $A \longrightarrow A'$ induserer isomorfi på homotopigrupper $\pi_i A \xrightarrow{\cong} \pi_i A'$ for alle $i < N$.

Når vi i teoremet sier at 'diagrammet er homotopikartesisk i et stabilt område avhengig av $n = (dimX - m)$ og m', så mener vi at det finnes et tall $N(m,n)$ slik at diagrammet er homotopikartesisk opp til grad $N(m,n)$, og at $\lim_{m,n\to\infty} N(m,n) = \infty$.

Teorem 4 (Waldhausen) *Det finnes avbildninger*

$$H(X) \longrightarrow \underset{k}{hocolim}\ P_k^m(X) \longrightarrow \underset{k}{hocolim}\ hP_k^m(X)$$

som utgjør en fibrering opp til homotopi i et stabilt område avhengig av $n = dimX - m$ *og* m.

Bevis: Teorem 3 sier at diagram (3) er homotopikartesisk i det stabile område angitt i teoremet for alle k, spesielt for $k = 0$. Men nå husker vi fra eksempel 4 at $hP_0^m(X) \simeq *$. At diagrammet er homotopikartesisk opp til en grad N er da ekvivalent med at

$$H(X) = P_0^m(X) \longrightarrow \underset{q}{hocolim}\ P_q^m(X) \longrightarrow \underset{q}{hocolim}\ hP_q^m(X)$$

er en fibrering opp til grad N.

□

Teorem 5 (Waldhausen) *Det finnes avbildninger*

$$H(X) \longrightarrow P_k^m(X) \longrightarrow hP_k^m(X)$$

for alle $k \geq 0$ *som utgjør en fibrering opp til homotopi i et stabilt område avhengig av* $n = dimX - m$ *og* m.

Bevis: Teorem 3 sier at diagram (3) er homotopikartesisk for alle $k \geq 0$. Det forrige teoremet fortalte oss at homotopifiberen til den nederste horisontale avbildningen i diagrammet var homotopiekvivalent med $H(X)$ i et stabilt område. Men siden diagrammet er homotopikartesisk i dette område, vil også homotopifiberen til den øverste horisontale avbildningen være ekvivalent med $H(X)$ i dette området.

□

I resten av oppgaven vil vi blant annet konstruere stabiliseringsavbildninger for å være i stand til å passere til grensen over både m og $n = dimX - m$, slik at teoremene over kan reformuleres uten forutsetningen om stabile områder.

2 Stabilisering

Gitt X og fiksér en undermangfoldighet X' slik at $cl\ (X \setminus X')$ er en lukket kraveomegn om ∂X. Det vil si at det eksisterer en CAT-embedding ϕ slik at følgende diagram kommuterer

$$\begin{tikzcd} \partial X \times [0,1] \arrow[r, "\phi"] & X \\ \partial X \times \{0\} \arrow[u, "inkl."] \arrow[ur, "inkl."'] & \end{tikzcd}$$

og $\phi(\partial X \times [0,1]) = cl\ (X \setminus X')$. Merk her at dersom $\partial X = \emptyset$, vil den eneste undermangfoldigheten som oppfyller dette kravet være $X' = X$.

Definisjon 4 *La $P(X, X') \subset P(X)$ være underrommet bestående av partisjoner som er standard over den åpne kraven $X \setminus X'$. La $t \in [a', b']$, og la $P(X)_t \subset P(X)$ være underrommet bestående av partisjoner som alle er standard av høyde t over en omegn om ∂X. Til slutt, la $P(X, X')_t = P(X, X') \cap P(X)_t$.*

Merk at dersom $\partial X = \emptyset$, gir det likevel mening å snakke om $P(X)_t$ siden høyden er med i partisjonsdataene. Disse valgene forandrer ikke homotopitypen på rommet vi ønsker å studere.

Lemma 2 *Inklusjonene*

$$\begin{tikzcd} & P(X)_t \arrow[dr, "2"] & \\ P(X,X')_t \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "3"'] & & P(X) \\ & P(X,X') \arrow[ur, "4"'] & \end{tikzcd}$$

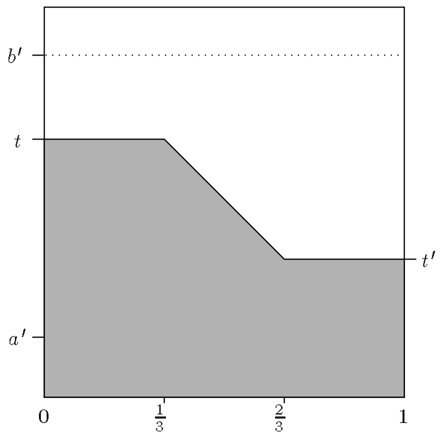
er alle homotopiekvivalenser. Det samme gjelder om vi ser på diagrammet med tilsvarende underrom av $hP(X)$.

Bevis: La oss først kommentere tilfellet der $\partial X = \emptyset$. Da er for det første $P(X, X')_t = P(X, X)_t = P(X)_t$ og $P(X, X') = P(X, X) = P(X)$. Men i dette tilfellet kan $P(X)$ identifiseres med $P(X)_t \times Map(P(X)_t, [a', b']) \simeq P(X)_t \times *$, så inklusjonen $P(X)_t \subset P(X)$ er selsvagt en homotopiekvialens.

Anta videre at $\partial X \neq \emptyset$. For å bevise at (4) er en ekvivalens bruker vi kraven $cl\ (X \setminus X')$ til å 'dytte' partisjonen vekk fra randen som følger. La

$\phi : \partial X \times [0,1] \longrightarrow X$ være en embedding slik at $\phi(\partial X \times [0,1]) = cl\ (X \setminus X')$ og $\phi(x,0) = x$ for alle $x \in \partial X$. La nå $f_t : \partial X \longrightarrow X$ være gitt ved $f_t(x) = \phi(x,t)$ for $t \in [0,1]$. Da er f_t en isotopi av inklusjonen $\partial X \subset X$ som kan utvides til en ambient isotopi $F_t : X \longrightarrow X$ slik at $F_0 = id_X$ og $F_1(X) \subset X'$. Denne isotopien kan vi så bruke til å krympe en partisjon til den er standard på den gitte omegnen.

Nøyaktig samme beviset forteller oss at (1) er en ekvivalens. For å vise at (2) er en ekvivalens, anta at $\alpha : P(X) \longrightarrow P(X, X')$ er homotopiinversen til (4) konstruert over. Vi skal vise at komposisjonen $\alpha \circ (2)$ er en ekvivalens ved å lage en homotopi-invers $\beta : P(X, X') \longrightarrow P(X)_t$ som følger: Anta at (M, F, N) er en partisjon over X som er standard av høyde t' over den åpne kraven $X \setminus X'$. Dersom vi identifiserer $X \setminus X'$ med $\partial X \times [0,1)$ vil det si at $M \cap \partial X \times [0,1) = \partial X \times [0,1) \times [a, t']$. La nå $S \subset [0,1] \times I$ være gitt som antydet på figuren under.



Mer presist kan S defineres som området under grafen til en CAT-funksjon $f : [0,1] \longrightarrow I$ som oppfyller kravene $f([0, \frac{1}{3}]) = t$ og $f([\frac{2}{3}, 1]) = t'$. Vi kan nå beskrive β ved å angi virkningen på (M, F, N) ved formelen

$$\beta M := (M \cap X' \times I) \bigcup_{\partial X' \times [a,t']} (\partial X) \times S$$

$(\beta M, \beta F, \beta N)$ er nå en partisjon over X som er standard av høyde t over en mindre omegn om ∂X.

Det er opplagt at β og $\alpha \circ (2)$ er homotopiinverser. Av dette følger det at (2) er en homotopiekvivalens, og siden diagrammet er kommutativt må også (3) være en homotopiekvivalens.

$\square$

2.1 Stabiliseringsavbildningene $\underline{\sigma}$ og $\overline{\sigma}$

Vi ønsker nå å gi definisjonene av stabiliseringsavbildningene. Motivasjonen for dette er selvsagt teorem 3 fra kapittel 1. Ved å konstruere to stabiliseringer som øker henholdsvis $dim X - m$ og hankeindeksen m i $P_k^m(X)$, kan vi ta grensen over begge disse og oppnå en reformulering av teoremet som gir oss et ekte homotopikartesisk kvadrat.

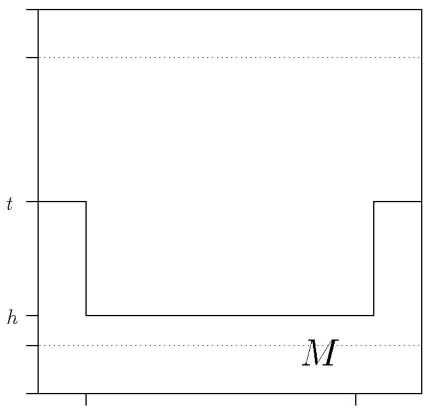
Først er vi nødt til å gjøre noen valg.

Definisjon 5 *La $M_{(X,X')}(h,t)$ være M-delen i en partisjon over X gitt som*

$$X' \times [a,h] \bigcup_{\partial X' \times [a,min(t,h)]} cl\ (X \setminus X') \times [a,t]$$

Vi vil ofte forkorte notasjonen og bare skrive $M(h)$ for $M_{(X,X')}(h,t)$ når resten av parametrene er opplagte.

Vi ser at partisjonen bestemt av $M_{(X,X')}(h,t)$ er et element i $P(X,X')_t$. Se figur 3. Vi vil senere referere til denne partisjonen som $(M_{(X,X')}(h,t), F_{(X,X')}(h,t), N_{(X,X')}(h,t))$. Anta nå gitt $0 < c_1 < c_2 < 1$ og sett



Figur 3: Minimalistisk partisjon over X

$J_i = [-c_i, c_i]$ for $i = 1,2$ og $J_3 = J$. For å forenkle notasjonen skal vi skrive $J_{i-j} = J_i \setminus int\ J_j$ for $i > j$. La videre $X' \subset int\ X$ være en undermangfoldighet slik at $cl\ (X \setminus X')$ er lukket kraveomegn om ∂X. Det er klart at $cl\ (X \times J \setminus X' \times J_2)$ er en lukket kraveomegn om $\partial(X \times J)$.

Definisjon 6 *La $(M,F,N) \in P(X,X')$ være en partisjon over X som er standard av høyde t over den åpne kraven $X \setminus X'$. La de to avbildningene*

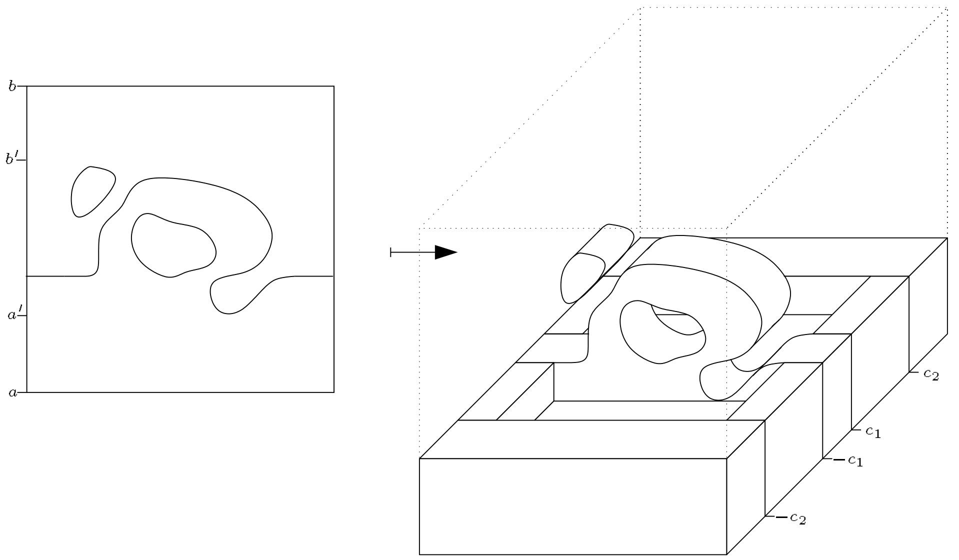
$$\underline{\sigma} : P(X,X') \longrightarrow P(X \times J, X' \times J_2)$$
$$\overline{\sigma} : P(X,X') \longrightarrow P(J \times X, J_2 \times X')$$

være definert ved at de tar partisjonen (M, F, N) til til partisjoner $(\underline{\sigma}M, \underline{\sigma}F, \underline{\sigma}N)$ og $(\overline{\sigma}M, \overline{\sigma}F, \overline{\sigma}N)$, der $\underline{\sigma}M$ og $\overline{\sigma}M$ er gitt ved

$$\underline{\sigma}M = \big(M \times J_1\big) \underset{M(a')\times\partial J_1}{\cup} \big(M_{(X,X')}(a',t) \times J_{2-1}\big) \underset{M(a')\times\partial J_2}{\cup} \big(M(t) \times J_{3-2}\big)$$
$$\overline{\sigma}M = \big(J_1 \times M\big) \underset{\partial J_1\times M}{\cup} \big(J_{2-1} \times M_{(X,X')}(b',t)\big) \underset{\partial J_2\times X\times[a,t]}{\cup} \big(J_{3-2} \times M(t)\big)$$

(Merk identifikasjonen $X \times I \times J \cong X \times J \times I$ som er gjort i definisjonen av $\underline{\sigma}$.) Vi vil i fremtiden også referere til $\underline{\sigma}$ og $\overline{\sigma}$ som henholdsvis nedre og øvre stabilisering. Se figur 4.

Dersom nå $CAT = DIFF$ vil definisjonene over medføre at singulariteter i mangfoldighetsstrukturen blir innført. Hvordan dette skal håndteres vil bli diskutert i kapittel 4 og 7.



Figur 4: Nedre stabilisering

2.1.1 Sammenligning med Waldhausens stabiliseringer

Vår definisjon av øvre- og nedrestabilisering viser seg å være en generalisering av Waldhausens tilsvarende definisjoner. I [10] defineres nedre- og øvre partisjoner som partisjoner som henholdsvis er standard av høyde a' og b' over en valgt kraveomegn om randen. Rommet av nedre partisjoner er da $\underline{P}(X) = P(X, X')_{a'}$ og tilsvarende for rommet av øvre partisjoner,

$\overline{P}(X) = P(X,X')_{b'}$. Følgende kommutative diagrammer viser at våre stabiliseringer er i samme homotopiklasse med Waldhausens:

$$\begin{tikzcd}
\underline{P}(X) \arrow[r, "\underline{\sigma}"] \arrow[d, tail, "inkl."', "\simeq"] & \underline{P}(X \times J) \arrow[d, tail, "inkl."', "\simeq"] \\
P(X,X') \arrow[r, "\underline{\sigma}"] & P(X \times J, X' \times J_2)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\overline{P}(X) \arrow[r, "\overline{\sigma}"] \arrow[d, tail, "inkl."', "\simeq"] & \overline{P}(J \times X) \arrow[d, tail, "inkl."', "\simeq"] \\
P(X,X') \arrow[r, "\overline{\sigma}"] & P(J \times X, J_2 \times X')
\end{tikzcd}$$

2.1.2 Stabilisering av hankerom

Som det kommer frem i teorem 3 og 4, er vi for det meste interessert i underrommene $P_k^m(X)$ og $hP_k^m(X)$ for varierende k og m. Som vi allerede har nevnt mange ganger, er hensikten med nedre og øvre stabilisering å øke henholdsvis $dimX - m$ og m. Følgende lemma sier at konstruksjonene våre er riktige.

Lemma 3 *Stabiliseringsavbildningene induserer avbildninger*

$$\underline{\sigma} : hP_k^m(X,X') \longrightarrow hP_k^m(X \times J, X' \times J_2)$$
$$\overline{\sigma} : hP_k^m(X,X') \longrightarrow hP_k^{m+1}(J \times X, J_2 \times X')$$

Bevis: Vi viser lemmaet for $k = 1$, når notasjonen er enklere. Se på den spesielle partisjonen (M_1^m, F_1^m, N_1^m) som ble beskrevet i avsnitt 1.4. La $r = dimX$. Dersom vi skriver

$$M_1^m = X \times [a,a'] \bigcup_{\partial D^m \times D^{r-m}} D^m \times D^{r-m}$$

er det lett å se at

$$\underline{\sigma} M_1^m = X \times J \times [a,a'] \bigcup_{\partial D^m \times D^{r-m} \times J_1} D^m \times D^{r-m} \times J_1$$

Men $J_1 \cong D^1$, og $\underline{\sigma} M_1^m$ beskriver derfor en partisjon i $h\underline{P}_1^m(X \times J)$. Siden $\underline{\sigma}$ avbilder veikompononenter på veikomponenter, er vi fremme.

Ved å se på N-delen av partisjonen viser man på samme måte lemmaet for $\overline{\sigma}$.

$\square$

Det følger nå at vi får indusert avbildninger

$$\begin{aligned} \underline{\sigma} : P_k^m(X, X') &\longrightarrow P_k^m(X \times J, X' \times J_2) \\ \overline{\sigma} : P_k^m(X, X') &\longrightarrow P_k^{m+1}(J \times X, J_2 \times X') \end{aligned}$$

siden $P_k^m(X)$ var definert som den simplisielle objektmengden til den simplisielle kategorien $hP_k^m(X)$. (Definisjon 3 på side 10.)

3 Mangfoldighetstrukturen på $\underline{\sigma}(M)$

Slik vi har definert stabiliseringsavbildningene kan det være vanskelig å se at det vi får faktisk er mangfoldigheter. Spesielt når vi ser på q-parameter familier av partisjone, der totalrommene er pålagt å gi lokalt trivielle familier av partisjoner. I dette kapittelet skal vi forsikre oss om at det ikke er noen grunn til engstelse. La $CAT = PL$ eller TOP.

3.1 Sammenliming av partisjoner

La (A', C', B') og (A, C, B) være to q-simplekser i $P(X)$ og anta at følgende er oppfylt:

(i) $A' \subset A$ som underrom av $\Delta^q \times X \times I$

(ii) Det eksisterer en q-parameter familie CAT isomorfier $\Phi : \Delta^q \times X \times I \longrightarrow \Delta^q \times X \times I$ over Δ^q slik at $\Phi_\xi(A'_\xi) = \{\xi\} \times X \times [a, a']$ for alle $\xi \in \Delta^q$

Gitt reelle tall $s_1 < s_2 < s_3$.

Lemma 4 (lime-lemma)
Mengden

$$\tilde{A} := [s_1, s_2] \times A' \underset{\{s_2\} \times A'}{\cup} [s_2, s_3] \times A$$

definerer en lokalt triviell q-parameter familie av undermangfoldigheter av $[s_1, s_3] \times X \times I$.

Bemerkning: Dersom hver $[s_1, s_2] \times A'_\xi \cup [s_2, s_3] \times A_\xi$ er en partisjon over $[s_1, s_3] \times X$ for alle $\xi \in \Delta^q$, får vi en lokalt triviell familie partisjoner, dvs. et q-simpleks i $P([s_1, s_3] \times X)$.

Bevis: Ved lemma 1 i avsnitt 1.2 trenger vi å sjekke følgende:

(i) $\tilde{A}$ er en kodimensjon-0 undermangfoldighet av $\Delta^q \times [s_1, s_3] \times X \times I$, og fronten $\tilde{C}$ er en kodimensjon-1 undermangfoldighet.

(ii) $\tilde{A}_\xi$ er en undermangfoldighet av $\{\xi\} \times [s_1, s_3] \times X \times I$, og fronten $\tilde{C}_\xi$ er en kodimensjon-1 undermangfoldighet for alle $\xi \in \Delta^q$

(iii) Projeksjonen av fronten $\tilde{C}$ ned på Δ^q er en CAT-submersjon

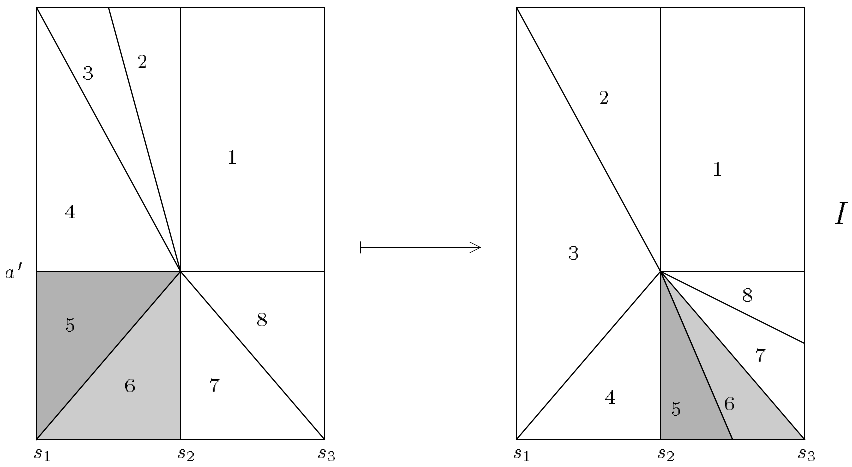
Planen er å konstruere en fibervis automorfi Σ på $\Delta^q \times [s_1, s_3] \times X \times I$ over Δ^q, slik at $\Sigma(\tilde{A}) = [s_2, s_3] \times W$ der ∂W utgjør fronten i en triviell q-familie partisjoner over X. Da følger punkt $(i) - (iii)$ umiddelbart.

Definér PL-automorfien $\tilde{\Phi}$ på $[s_1, s_3] \times (\Delta^q \times X \times I)$ ved $\tilde{\Phi} = id \times \Phi$. Vi observerer så at

$$\tilde{\Phi}(\tilde{A}) = [s_1, s_2] \times \Delta^q \times (X \times [a, a']) \bigcup_{\{s_2\} \times \Delta^q \times X \times [a,a']} [s_2, s_3] \times \Phi(A)$$

La videre ψ være PL-automorfien på $[s_1, s_3] \times I$ definert simplisielt som i figur 5. Denne automorfien 'bretter ned' $[s_1, s_2] \times [a, a']$. Nå kan vi identifisere $[s_1, s_3] \times \Delta^q \times X \times I$ med $\Delta^q \times X \times [s_1, s_3] \times I$ og definere $\Psi := id_{(\Delta^q \times X)} \times \phi$. Da vil $\Sigma := \Psi \circ \tilde{\Phi}$ være en automorfi slik at $\Sigma(\tilde{A}) = [s_2, s_3] \times \tilde{\Phi}(A)$ som ønsket.

$\square$



Figur 5: ψ er definert simplisielt

3.2 Anvendelser på stabiliseringsavbildningene

La oss nå vise at nedre stabilsering er veldefinert i TOP og PL kategoriene. Argumentet for øvre stabilsering er helt motsvarende.

For det første er det klart at $M_{(X,X')}(a', t)$ slik vi definerte den på side 15 er en undermangfoldighet av $X \times I$ og det finnes en automorfi Φ som tar $M_{(X,X')}(a', t)$ til $M_{(X,X')}(a', a') = X \times [a, a']$. I tillegg er $M_{(X,X')}(a', t) \subset M$ for alle $M \in P(X, X')_t$, så lemmaet gir at unionen $M \times J_1 \bigcup_{M(a') \times \{\pm c_1\}} M(a') \times J_{2-1}$

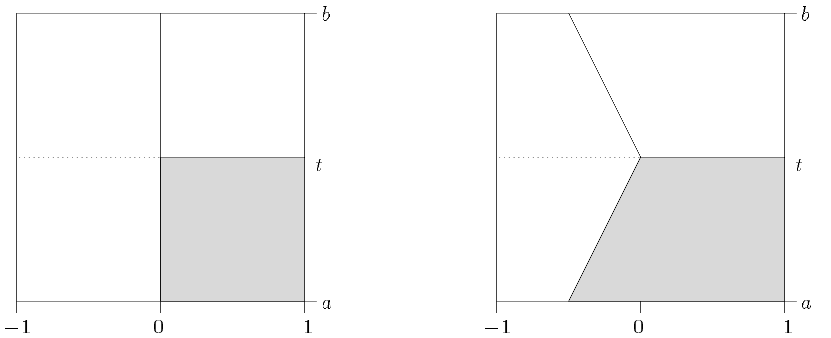
tillater en mangfoldighetstruktur. Det samme gjelder når vi i tillegg limer på $X \times [a,t] \times J_{3-2}$.

Automorfien Φ kan konstrueres som følger. Velg en tosidig krave om $\partial X'$, det vil si en embedding $\phi : \partial X' \times [-1,1] \longrightarrow X$ slik at

$$\begin{tikzcd}
\partial X' \times [-1,1] \arrow[r, "\phi"] & X \\
\partial X' \times \{0\} \arrow[u, "inkl."] \arrow[ur, "inkl."'] &
\end{tikzcd}$$

Vi krever videre at $\phi(x,t) \in X'$ for $t \leq 0$. Definér en automorfi g på $[-1,1] \times I$ som vist på figur 6. La så $K = \phi(\partial X' \times [-1,1])$ være bildet av kraven i X. Da kan vi bruke g til å definere selvavbildingen Φ på $X \times I$ som følger: Identifisér først $\partial X' \times [-1,1]$ med sitt bilde K. La $\Phi\big|_{(X \setminus K)\times I}$ være identiteten, og sett $\Phi(x,s,t) = (x, g(s,t))$ for alle $(x,s,t) \in K \times I$.

Etter å ha anvendt automorfien ser fronten til $M(a')$ ut som grafen til en stykkevis lineær funksjon på X. Det er nå en smal sak å lage en deformasjon som tar denne grafmangfoldigheten ned til $X \times [a, a']$.



Figur 6: Automorfien g på $[-1,1] \times I$

4 Normalvektorfelt og glatting

I definisjonen av stabiliseringsavbildningene har vi vært hensynsløse og innført singulariteter i mangfoldighetene. Dette må fikses i tilfellet $CAT{=}DIFF$. Vi følger Waldhausen [10] og definerer en større simplisiell mengde av partisjoner som inneholder den gamle som deformasjonsretrakt. Hvert 0-simpleks skal bestå av en topologisk partisjon over X, som i tillegg skal være utstyrt med et glatt vektorfelt på $X \times I$ som er normalt til fronten i en viss forstand.

4.1 Undermangfoldigheter som kan glattes

La X være en glatt kompakt mangfoldighet som før og $F \subset X \times I$ være fronten til en partisjon over X.

Definisjon 7 *Et vektorfelt på $X \times I$ er en seksjon i vektorbunten*

$$T(X \times \mathbb{R})\big|_{X \times I} \xrightarrow{\pi} X \times I$$

Dersom $\partial X \neq \emptyset$, kreves det i tillegg at seksjonen over $\partial X \times I$ ligger i $T(\partial X \times \mathbb{R})\big|_{\partial X \times I}$.

Dersom F er en glatt undermangfoldighet, kan vi snakke om normalbunten til $F \subset X \times I$ som i dette tilfellet vil være en linjebunt. Denne linjebunten gir oss en tubulær omegn til F i $X \times I$.

Hva nå med tilfellet der F ikke er en glatt undermangfoldighet? Det viser seg at dersom det eksisterer et vektorfelt på $X \times I$ som oppfyller en normalitetsbetingelse, kan vi perturbere F til en glatt undermangfoldighet.

La derfor ω være et glatt vektorfelt på $X \times I$, F fronten i en topologisk partisjon og $\gamma_p : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow X \times I$ flytkurven til ω gjennom p. Dette betyr at:

$$\begin{aligned} \gamma_p(0) &= p \\ \tfrac{d}{dt}\gamma_p(t) &= \omega(\gamma_p(t)) \end{aligned}$$

Anta først for enkelhets skyld $\partial X = \emptyset$. Da er det slik at siden F er kompakt og er inneholdt i $X \times int\ I$, finnes en konstant $c > 0$ slik at hver flytlinje γ_p for $p \in F$ har en løsning $\gamma_p(t)$ for alle $t \in (-c, c)$. I de fleste tilfeller vil randen til X ikke være tom. Vektorfeltet må da oppfylle tilleggsbetingelsen i definisjon 7, og er derfor parallelt med $\partial X \times I$ ute ved randen. Siden dette er tilfelle, kan flytlinjer i $int\ X \times I$ aldri nå ut til $\partial X \times I$, og konklusjonen over holder også i tilfellet $\partial X \neq \emptyset$.

Dette betyr med andre ord at funksjonen $exp : F \times (-c, c) \longrightarrow X \times I$ definert ved $exp(p, t) = \gamma_p(t)$ er veldefinert.

La nå $\frac{d}{dt}$ betegne enhetsvektoren i I-retningen i $X \times I$.

Definisjon 8 (M, F, N, ω) *kalles en normalisert partisjon over* X *dersom følgende krav er oppfylt:*

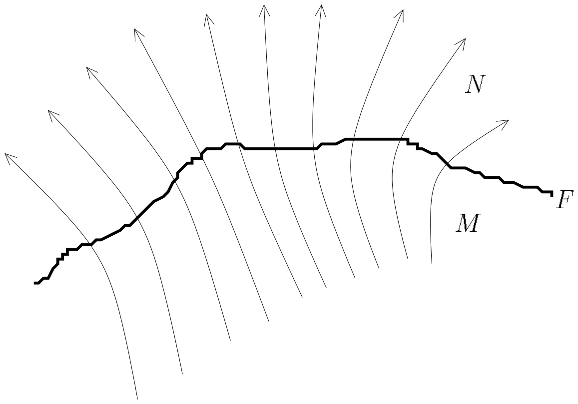
(i) ω *er lik* $\frac{d}{dt}$ *over en omegn om* ∂X

(ii) ω *har positiv* $\frac{d}{dt}$*-komponent i underrommet* $X \times ([a, a'] \cup [b', b])$.

(iii) For hvert punkt $p \in F$ *finnes en omegn* $U \subset F$ *om* p *og en* $\epsilon > 0$ *slik at* $exp\big|_{U\times(-\epsilon,\epsilon)}$ *er en topologisk embedding og slik at* $exp(U \times [0, \epsilon)) \subset N$ *og* $exp(U \times (-\epsilon, 0]) \subset M$.

De to første egenskapene vil i fremtiden bli referert til som *standardbetingelsene* et normaliserende vektorfelt skal oppfylle. Den siste egenskapen uttrykker at vektorfeltet *normaliserer* fronten F som undermangfoldighet av $X \times I$ og at alle flytlinjene går fra M til N. Det siste er automatisk for alle flytlinjer gjennom de veikomponentene av fronten som inneholder punkter over randen til X. Dette på grunn av krav (i). At vi krever dette for flyten gjennom alle veikomponentene til fronten er kun teknisk fordelaktig for senere bruk.

Dersom F er en glatt undermangfoldighet med en seksjon i normalbunten som ikke har nullpunkter, er det klart at en utvidelse av denne til hele $X \times I$ oppfyller krav (iii). Siden alle utvidelser utgjør en konveks mengde i rommet av vektorfelt på $X \times I$, kan vi selvsagt velge en utvidelse som oppfyller betingelsene (i) og (ii) siden rommet av valg er kontraktibelt.



Figur 7: Flyten gjennom en topologisk front

4.2 Normalisering gir glatt struktur

Vi vil nå gjengi Waldhausens argument for at en normalisering gir en glatt struktur på F. I [10] brukes en annen definisjon av normalitet, men det viser seg at definisjon 8 er nøyaktig hva som skal til for at følgende argument holder:

At et vektorfelt er normalt til F i $X \times I$ medfører at exp er en lokal topologisk embedding om $F \times \{0\} \subset F \times (-c, c)$. Men det følger da at det finnes en omegn $E \subset F \times (-c, c)$ om $F \times \{0\}$ slik at $exp\big|_E$ er en topologisk embedding. (Se [6], lemma 7.2.)

Gitt nå en front $F \subset X \times I$ med normalisering ω og la $dimX = n$. For hver $x \in F$ kan vi velge en glatt embeddet disk $f : D^n \longrightarrow X \times I$ sentrert i x slik at $D_x := f(D^n)$ er transversal til vektorfeltet ω. Ved å begrense til en disk av mindre radius kan vi anta at $D_x \subset exp(E)$. (Ved invarians av domain er $exp(E)$ en omegn om F.) Da er $\exp^{-1}(D_x) \subset E$ en glatt disk embeddet transversalt til flyten $\frac{d}{dt}$ i E. Ved å begrense til en mindre disk kan vi anta at hver flytlinje kun snitter D_x i ett punkt.

Man skaffer seg så en homeomorfi mellom D_x og en diskomegn om x i F ved å følge flytlinjene fra D_x til F. Siden $exp\big|_E$ er en embedding vil hver flytlinje også snitte F kun én gang. Kall denne homeomorfien ϕ_x.

Dersom vi har to punkter $x, y \in F$ slik at $\phi_x(D_x) \cap \phi_y(D_y) \neq \emptyset$ bestemmer $\phi_y^{-1}\phi_x$ en glatt funksjon siden den er gitt ved flyten langs et glatt vektorfelt, og derfor vil overdekningen $\{\phi_x(D_x)\}_{x \in F}$ være et glatt atlas for F.

Videre kan vi velge en embedding av F som glatt undermangfoldighet av $X \times I$. Velg en endelig overdekning $\{int\ \phi_i(D_i)\}_{i=1}^N$ av F. For $p \in \phi_i(D_i)$ kan vi definere avstanden $r_i(p) \in \mathbb{R}$ til det tilsvarende punktet på den embeddede disken D_i, dvs. $exp(p, r_i(p)) \in D_i$. Dette definerer r_i som en kontinuerlig funksjon $\phi_i(D_i) \longrightarrow \mathbb{R}$. Velg så for hver i en kontinuerlig funksjon $f_i : F \longrightarrow [0, 1]$, slik at $supp(f_i) \subset int\ \phi_i(D_i)$ og $\{int\ f_i^{-1}(1)\}_i$ er en åpen overdekning av F.

Vi fortsetter nå induktivt. La $F_1 := F$. La $\Psi_1 : F_1 \longrightarrow X \times I$ være embeddingen gitt ved formelen $\Psi_1(p) = exp(p, f_1(p) \cdot r_1(p))$. Merk at $\Psi_1(p)$ gir mening også når $r_1(p)$ ikke er definert, siden dette medfører at $f_1(p) = 0$. Observér at den åpne mengden $int\ f_1^{-1}(1)$ blir embeddet som en glatt undermangfoldighet av $X \times I$. I tillegg vil vektorfeltet fremdeles være normaliserende for $\Psi_1(F_1)$. La så $\{f_i\Psi_1^{-1}\}$ være den nye mengden funksjoner tilordnet overdekningen $\{int\ \Psi_1\phi_i(D_i)\}_{i=1}^N$.

La $F_n = \Psi_{n-1}(F_{n-1})$, og gjenta prosessen. I det n'te steget er $\Psi_n(p) = exp(p, f_n(p) \cdot r_n(p))$, og diskomegnen $\phi_n(D_n)$ 'dyttes' ut i $X \times I$ slik at en åpen delmengde blir embeddet glatt. Dersom $\phi_n(D_n) \cap \phi_m(D_m) \neq \emptyset$, vil avstandsfunksjonen være glatt på de områdene som allerede er glattet. På denne måten oppnår vi en embedding F_N av F, slik at F_N er en glatt undermangfoldighet av $X \times I$.

Merk at forskjellige valg av slike embeddinger skiller seg fra hverandre ved glatt en funksjon, nemlig funksjonen som måler avstanden mellom dem langs den glatte flyten. Valgene vi gjør er derfor kontraktible.

4.3 Rommet av normaliserte partisjoner

La oss nå redefinere $P(X)$ i tilfellet $CAT = DIFF$.

Definisjon 9 *Rommet $P(X)$ av partisjoner over X er den simplisielle mengden hvor et q-simpleks er et kvadrupel (A, C, B, Ω) der (A, C, B) er en lokalt triviell TOP-familie av partisjoner parametrisert over Δ^q. Videre skal Ω være et glatt vektorfelt på $\Delta^q \times X \times I$ over Δ^q, slik at $(A_\xi, C_\xi, B_\xi, \Omega_\xi)$ er en normalisert partisjon for alle $\xi \in \Delta^q$. (Her er Ω_ξ vektorfeltet $(x,t) \mapsto \Omega(\xi, x, t)$.)*

Kort sagt er $P(X)$ gitt ved at alle partisjoner (M, F, N) som opptrer skal være topologiske partisjoner utstyrt med et vektorfelt ω slik at (M, F, N, ω) er en normalisert partisjon.

Anta at $X' \subset X$ er en kodimensjon-0 undermangfoldighet av X slik at $cl\ (X \setminus X')$ er en lukket kraveomegn om ∂X. Vi må gi mening til underrommet $P(X, X') \subset P(X)$ i det glatte tilfellet:

Definisjon 10 *$P(X, X')$ er underrommet av $P(X)$ bestående av alle partisjoner som er standard av en eller annen høyde t over den åpne kraven $X \setminus X'$ om ∂X. I tillegg skal vektorfeltet ω være konstant lik $\frac{d}{dt}$ på underrommet $(X \setminus X') \times I$.*

Vi krever med andre ord at den første betingelsen i definisjon 8 skal gjelde over en fiksert omegn om randen for alle normaliseringer.

La oss anta at X er en orienterbar mangfoldighet og F er en glatt front. Da er normalbunten til $F \subset X \times I$ triviell og vi kan velge en seksjon uten nullpunkter som peker inn i N. For å unngå valg antar vi at hver vektor i seksjonen har lengde 1. Det er nå som sagt et kontraktibelt valg å plukke ut en utvidelse til hele $X \times I$ som oppfyller $(i) - (iii)$ i definisjon 8.

Velg nå et slikt normaliserende vektorfelt for hver q-parameter familie av glatte partisjoner. Siden valgene av forskjellige utvidelser er kontraktible, kan vi velge slik at de stemmer overens med fasett- og degenerasjonsavbildningene i $P(X)$. På denne måten kan vi tenke på glatte partisjoner som et underrom av rommet av normaliserte partisjoner.

Lemma 5 *Underrommet av glatte partisjoner sitter som en deformasjonsretrakt i rommet av normaliserte partisjoner.*

Bevis: Vi betegner underrommet av glatte partisjoner med $gP(X)$. Da kan vi lage en retraksjon $q : P(X) \longrightarrow gP(X)$: Begynn med 0-simpleksene, og velg en glatt embedding som i avsnitt 4.2 for alle partisjoner. Velg så til denne glatte partisjonen et normalfelt som diskutert over. Siden begge valgene er kontraktible, kan vi gjøre tilsvarende valg for alle q-familier av partisjoner slik at de er kompatible med den simplisielle strukturen i $P(X)$. Dersom partisjonen allerede er glatt, gjør vi ingenting.

Slik vi valgte glattingen av en front, finnes det en kontinuerlig funksjon $r : F \longrightarrow \mathbb{R}$ som måler avstanden fra fronten til dens differensiable embedding. Denne funksjonen har egenskapen at avbildningen $p \mapsto exp(p, r(p))$, for $p \in F$, er den glatte embeddingen. Vi kan derfor definere en homotopi mellom $id_{P(X)}$ og retraksjonen over ved å gå frem i to trinn: Først, la avbildningen $q_t : P(X) \longrightarrow P(X)$ være gitt ved at for en partisjon (M, F, N, ω) skal $q_t(M, F, N)$ være gitt ved at $q_t(F) = exp(p, t \cdot r(p))$. Under denne deformasjonen lar vi vektorfeltet være uforandret. Det vil selvsagt være normaliserende for alle $t \in [0, 1]$. Da vil $q_1(M, F, N)$ være den glattede partisjonen, men med et annet vektorfelt enn $q(M, F, N)$. Men nå er fronten en glatt undermangfoldighet, så mengden av normaliserende vektorfelt er en konveks mengde. Ved f.eks. lineærinterpolasjon mellom det gamle normalfeltet og det gitt ved en utvidelse av seksjonen i normalbunten, er vi fremme.

□

4.4 Flyten gjennom en front

La ω være et glatt vektorfelt på $X \times I$. Anta først at ω normaliserer (M, F, N) og la $t \mapsto \gamma_p(t)$ være flytlinjen gjennom punktet $p \in F$. På grunn av (iii) i definisjon 8 vil flytkurven passere p fra M til N. Mer presist kan dette utrykkes slik:

$$\gamma_p(t) \in N \Leftrightarrow t \geq 0$$
$$\gamma_p(t) \in M \Leftrightarrow t \leq 0$$

Det viser seg at denne egenskapen karakteriserer normaliserende vektorfelt.

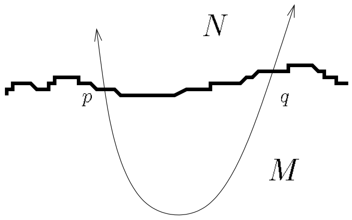
Lemma 6 *Gitt en partisjon (M, F, N) over X, et glatt vektorfelt ω på $X \times I$ og anta at hver flytlinje gjennom F er slik at*

$$\gamma_p(t) \in N \Leftrightarrow t \geq 0$$
$$\gamma_p(t) \in M \Leftrightarrow t \leq 0$$

for alle $p \in F$. Da vil (F, ω) oppfylle (iii) i definisjon 8.

Bevis: Vi vet allerede at flytlinjene går fra M til N. La $x \in F$. Det gjenstår å se at det eksisterer en omegn $U \subset F$ om x og $\epsilon > 0$ slik at $exp\big|_{U\times(-\epsilon,\epsilon)}$ er en embedding.

La $D \subset F$ være en kompakt omegn om $x \in F$. Siden D er kompakt og $\omega\big|_F \neq 0$ finnes en $\epsilon > 0$ slik at alle flytlinjer $t \mapsto \gamma_p(t)$, der $p \in D$, er definert for alle $t \in [-\epsilon, \epsilon]$. Alt vi trenger å vise er at $exp\big|_{D\times[-\epsilon,\epsilon]}$ er injektiv. Anta det motsatte. Da eksisterer det punkter $p \neq q \in D$ og verdier $s, t \in [-\epsilon, \epsilon]$ slik at $\gamma_p(s) = \gamma_q(t)$. Dette betyr at vi har en flytkurve som forbinder p og q.



Videre kan vi anta at segmentet av kurven fra p til q er inneholdt i enten M eller N. Men dette er en motsigelse siden det er antatt at flytlinjene som passerer F skal gå fra M til N. Slik situasjonen er nå, vil flyten passere i feil retning ved ett av punktene.

Dermed har vi at $exp\big|_{D\times[-\epsilon,\epsilon]}$ er en injektiv avbildning fra et kompakt rom til et Hausdorff rom, og følgelig en embedding.

$\square$

Vi kan nå gi et lemma som vi skal bruke senere i anvendelser.

Lemma 7 *Gitt en partisjon (M, F, N). Anta at $M = M_1 \cup M_2$, der M_i er kodimensjon-0 undermangfoldigheter av $X \times I$. Anta videre at ω oppfyller hypotesen i lemma 6 for (M_i, F_i, N_i), $i = 1, 2$. Da vil (M, F, N, ω) oppfylle krav (iii) i definisjon 8.*

Bevis: La $p \in F_1$, og $t \mapsto \gamma_p(t)$ være en flytlinje gjennom p. Vi vil vise at (F, ω) oppfyller hypotesen i lemma 6. Da vet vi at

$$\gamma_p(t) \in N_1 \Leftrightarrow t \geq 0$$
$$\gamma_p(t) \in M_1 \Leftrightarrow t \leq 0$$

Dersom $p \in int\ M_2$ er det ingenting å sjekke siden $p \notin F = \partial(M_1 \cup M_2)$. Hvis $p \in int\ N_2$, er egenskapen over tilstrekkelig til å konkludere at γ_p er normal til F i betydningen av hypotesen i lemma 6.

Det siste tilfellet er når $p \in F_2$. Da vet vi at

$$\gamma_p(t) \in N_i \Leftrightarrow t \geq 0$$
$$\gamma_p(t) \in M_i \Leftrightarrow t \leq 0$$

for $i = 1, 2$. Dette er impliserer at

$$\gamma_p(t) \in N_1 \cap N_2 \Leftrightarrow t \geq 0$$
$$\gamma_p(t) \in M_1 \cap M_2 \Leftrightarrow t \leq 0$$

som er tilstrekkelig til at γ_p oppfyller hypotesen i lemma 6.

□

Bemerkning: Det er tilstrekkelig at M_i oppfyller hypotesen i lemma 6 for alle punkter $p \in M_i \cap F$. Dessuten viser lemmaet noe mer: Legg merke til at $N = N_1 \cap N_2$. Vi har dermed et dualt utsagn. Dersom (M, F, N) er gitt ved at $M = M_1 \cap M_2$, og ω oppfyller hypotesen i lemma 6 for (M_i, F_i, N_i), da er også (F, ω) en normalisert front i betydning av (iii) i definisjon 8.

Vi kan bruke dette til å glatte hjørner:

Lemma 8 *Anta at X og Y er mangfoldigheter, $A \subset X$ og $B \subset Y$ er kodimensjon-0 undermangfoldigheter, og at ω er et vektorfelt på $X \times Y$. Anta videre at $(\partial A \times \{y\}, pr_{A\times\{y\}} \circ \omega)$ og $(\{x\} \times \partial B, pr_{\{x\}\times B} \circ \omega)$ oppfyller hypotesen i lemma 6 for alle $x \in X$ og $y \in Y$.*

Da vil $(\partial(A \times B), \omega)$ være en normalisert undermangfoldighet av $X \times Y$.

Bevis: Siden $A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$, trenger vi ved bemerkningen til lemma 7 kun å sjekke at ω normaliserer $A \times Y$ og $X \times B$. Men dette er akkurat hva hypotesen forteller oss, og vi er fremme.

□

4.5 Waldhausens definisjon

Definisjon 11 *La $U \subset X \times I$ være en kartomegn slik at $U \cap F \neq \emptyset$, og la $x \in F \cap U$. Anta at det eksisterer positive tall c og C slik at*

(i)

$$d(F \cap U, x + s \cdot \omega_x) \geq |s| \cdot c \quad \textit{for} \quad |s| \leq C$$

(Her har vi identifisert U med en åpen mengde i $\mathbb{R}^{n+1}$, ω med det tilsvarende vektorfeltet og $d(-,-)$ er den euklidske metrikken.)

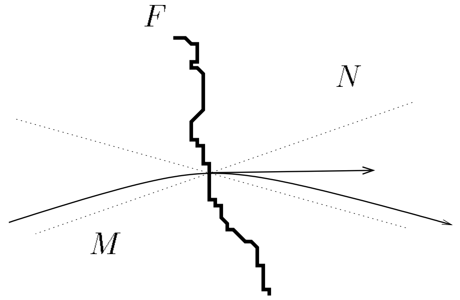
(ii) *Linjen $x+s\cdot\omega_x$ gjennom x går fra M til N gjennom F, dvs. er inneholdt i N for $s \geq 0$ og inneholdt i M for $s \leq 0$*

(iii) *Feltet er konstant lik $\frac{d}{dt}$ over en omegn om ∂X, og har positiv $\frac{d}{dt}$-komponent i områdene $X \times ([a, a'] \cup [b', b])$*

Dersom dette er oppfylt for hver kartomegn U og hver $x \in U$, sier vi at ω normaliserer F i $X \times I$.

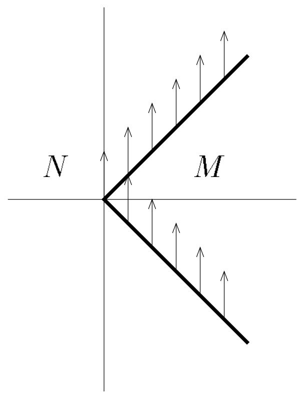
Når man skal undersøke om et vektorfelt er normalt er det selvsagt nok å begrense seg til en overdekning av kartomegner av F.

At et vektorfelt på $X \times I$ er normalt til F betyr spesielt at det er ikke-forsvinnende på en omegn om F. Krav (i) uttrykt ved ulikheten betyr at linjen gjennom x med retning ω_x er inneholdt i en dobbel kjegleformet omegn som snitter F kun i punktet x selv. I tillegg følger det av krav (ii) at den delen av den doble kjeglen som inneholder $x + s \cdot \omega_x$ for $s \geq 0$ skal være inneholdt i N, mens den andre delen skal være inneholdt i M.



Dette kravet er ikke med i den opprinnelige definisjonen i [10] (kapittel 6), men er nødvendig som dette moteksempelet viser:

Eksempel 5 *La unionen av linjestykkene $y = x$ og $y = -x$ for $x \geq 0$ være $F \subset \mathbb{R}^2$. Anta at alt til høyre for F er M-delen i (M, F, N), og definér ω som det konstante vektorfeltet $(x, y) \mapsto (0, 1)$.*



Da oppfyller ω kravet om at linjen gjennom hvert punkt på F med retning ω_x er inneholdt i en dobbel kjegle vekk fra F. Men det er ikke slik at hver halvdel av kjeglen er inneholdt i hver sin M og N. Det er klart at (F, ω) ikke er det man vil kalle en normalisert undermangfoldighet.

Fordelen med den siste definisjonen er at man kun sjekker om linjen gjennom hvert punkt $x \in F$ med retning ω_x går fra M til N. I definisjon 8 må man sjekke selve flytlinjen. Følgende lemma forteller oss at definisjon 11 gir oss hva vi vil ha.

Lemma 9 *For alle $x \in F$ eksisterer en omegn $D \subset F$ om x og $\epsilon > 0$ slik at $exp\big|_{D\times[-\epsilon,\epsilon]}$ er en embedding.*

Bevis: La $x \in F$ og anta at kravene i definisjonen er oppfyllt. Alle kurver γ som oppfyller $\gamma(0) = x$ og $\frac{d}{dt}\gamma(0) = \omega_x$, vil oppfylle kravet i lemma 6 siden γ vil være inneholdt i den doble kjeglen nær punktet x.

$\square$

4.6 Sammenliming av partisjoner

Til slutt vil vi gå gjennom et eksempel som kommer til å dukke opp i anvendelsene av teorien over. Det har å gjøre med lime-lemmaet i kapittel 3, og skal hjelpe oss å gjenkjenne normaliserende vektorfelt når vi limer to partisjoner sammen på denne måten.

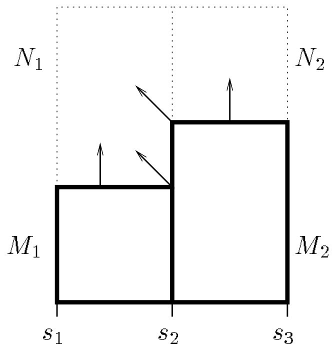
Gitt reelle tall $s_1 < s_2 < s_3$. Anta at $(M_1, F_1, N_1), (M_2, F_2, N_2)$ er to partisjoner over X, slik at $M_1 \subset M_2$ og $\omega' = (f, \omega)$ er et vektorfelt på $[s_1, s_3] \times (X \times I)$.

Anta videre at $M := [s_1, s_2] \times M_1 \cup [s_2, s_3] \times M_2$ bestemmer en kodimensjon-0 undermangfoldighet av $[s_1, s_3] \times X \times I$ slik at:

(i) $f(s_2, p) < 0$ for alle $p \in X \times I$

(ii) Vektorfeltet $p \mapsto \omega(s, p)$ normaliserer (M_1, F_1, N_1) for alle $p \in X \times I$ og $s \in [s_1, s_2]$

(iii) Vektorfeltet $p \mapsto \omega(s, p)$ normaliserer (M_2, F_2, N_2) for alle $p \in X \times I$ og $s \in [s_2, s_3]$



Da er $\big(\partial M, (f,\omega)\big)$ en normalisert undermangfoldighet av $[s_1, s_3] \times X \times I$.

Dette sjekker vi i to trinn: Først ser vi at dersom $s \neq s_2$, ser ∂M lokalt ut som et produkt i s-retningen, og det spiller ingen rolle hva f er for noe. Egenskapene (ii) og (iii) er nok for at normalitetsbetingelsen er oppfyllt i disse tilfellene.

Dersom $s = s_2$, gjør vi som følger: Anta at $p \in M_2 \setminus M_1$. Lokalt ser da M ut som et produkt $[s_2, s_2+\epsilon] \times U$, der U er en omegn i $M_2 \setminus M_1$ om p. Men nå oppfyller vektorfeltet (f,ω) hypotesen i lemma 8, og vi er fremme. Dersom $p \in F_1 \setminus F_2$, snur vi rundt på situasjonen og merker at N lokalt ser ut som et produkt $[s_2-\epsilon, s_2] \times V$. Her er nå V en omegn i $N_1 \setminus N_2$ om p. Nok en gang er vi fremme. Anta til slutt at $p \in F_1 \cap F_2$. Men siden ω normaliserer F_1 og F_2, er vi fremme ved lemma 7.

4.7 Addendum til lemma 1

La X være en kompakt glatt mangfoldighet som før, og la F være fronten i en topologisk partisjon over X.

4.7.1 Ambiente isotopier i $CAT = DIFF$

Anta at $f : [0,1] \times F \longrightarrow [0,1] \times X \times I$ er en embedding over $[0,1]$ slik at f_0 er lik inklusjonen $F \subset X \times I$. Vi har med andre ord en isotopi av inklusjonen. Gitt så et glatt vektorfelt Ω på $[0,1] \times X \times I$ over $[0,1]$ slik at undermangfoldigheten $f_t(F) \subset X \times I$ er normalisert av Ω_t for alle $t \in [0,1]$. Vi sier da at f er en normalisert isotopi.

Lemma 10 *La $f : [0,1] \times F \longrightarrow [0,1] \times X \times I$ være en normalisert isotopi av inklusjonen. Det eksisterer en topologisk automorfi Ψ av $[0,1] \times X \times I$ over $[0,1]$ slik at $\Psi(t,p) = f(t,p)$ for alle $p \in F \subset X \times I$ og $t \in [0,1]$.*

Bevis: Vektorfeltet Ω normaliserer hele undermangfoldigheten $f([0,1] \times F) \subset [0,1] \times X \times I$. Ved diskusjonen i avsnitt 4.2 kan vi derfor ved å følge flytlinjene, konstruere en glattet embedding av $f([0,1]\times F)$. Dette produserer en embedding $[0,1]\times F \hookrightarrow [0,1]\times X\times I$ over $[0,1]$ slik at bildet er en glatt undermangfoldighet. Betegn den glattede undermangfoldigheten med $f([0,1]\times F)^g$. Men vi kan gjøre mer: Ved å pertubere $[0,1]\times F$ langs flytlinjene, kan vi definere en ambient automorfi Γ av $[0,1]\times X\times I$ over $[0,1]$ slik at $\Gamma([0,1]\times F) = f([0,1]\times F)^g$.

La så $F^g = f([0,1]\times F)^g_{t=0}$ være den delen av $f([0,1]\times F)^g$ som ligger over $t=0$ i $[0,1]$. Da er F^g glatt undermangfoldighet av $X\times I$. La $f^g : [0,1]\times F^g \longrightarrow [0,1]\times X\times I$ være definert slik at diagrammet

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]\times X\times I} \arrow[r, "\Gamma", "\cong"'] & {[0,1]\times X\times I} \\
{[0,1]\times F} \arrow[u, "f"] \arrow[r, "id\times h", "\cong"'] & {[0,1]\times F^g} \arrow[u, "f^g"']
\end{tikzcd}$$

kommuterer. Her er $h : F \longrightarrow F^g$ lik $\Gamma\big|_{\{0\}\times F}$.

Da er f^g en glatt isotopi av inklusjonen $F^g \subset X\times I$, og kan derfor utvides til en ambient isotopi $\Phi : [0,1]\times X\times I \longrightarrow [0,1]\times X\times I$ over $[0,1]$. La nå $\Psi := \Gamma^{-1}\circ\Phi\circ(id_{[0,1]}\times\Gamma\big|_{\{0\}\times X\times I})$. Siden følgende diagram er kommutativt

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]\times X\times I} \arrow[r, "\Gamma", "\cong"'] & {[0,1]\times X\times I} & \\
{[0,1]\times F} \arrow[u, "f"] \arrow[r, "id\times h", "\cong"'] \arrow[d, "id\times inkl."] & {[0,1]\times F^g} \arrow[u, "f^g"] \arrow[r, "id\times inkl."] & {[0,1]\times X\times I} \arrow[ul, "\Phi"'] \\
{[0,1]\times X\times I} \arrow[urr, bend right, "id\times\Gamma_{0\times X\times I}"'] & &
\end{tikzcd}$$

vil Ψ utvide f, og vi er fremme.

□

Når $CAT = DIFF$, gir ikke lenger beviset i av lemma 1 mening. En partisjon er nå en TOP partisjon med en normalisering. Beviset for lemmaet går imidlertid uforandret helt frem til der det er snakk om å utvide isotopien G_s til en ambient isotopi. Men nå vil normaliseringen av partisjonen gi opphav til en normalisert isotopi. Denne kan ved resultatet over utvides.

5 Avbildningsteleskop

Gitt en følge $X_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} \cdots$ av CW-komplekser og kontinuerlige avbildninger. Avbildningsteleskopet $\underset{n,f_n}{Tel}\, X_n$ av følgen er definert som rommet $\coprod_n [n, n+1] \times X_n$ delt ut med relasjonen $(n+1, x) \sim (n+1, f_n(x))$ for $x \in X_n$. Det er velkjent at homotopikolimes av en slik følge er ekvivalent med avbildningsteleskopet.

Anta nå at vi har to følger av CW-komplekser som over med avbildninger mellom seg,

$$\begin{tikzcd} Y_1 \arrow[r, "g_1"] & \cdots \arrow[r] & Y_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[dr, phantom, "\boxed{H^n}"] & Y_{n+1} \arrow[r] & \cdots \\ X_1 \arrow[u, "\xi_1"] \arrow[r, "f_1"] & \cdots \arrow[r] & X_n \arrow[u, "\xi_n"] \arrow[r, "f_n"] & X_{n+1} \arrow[u, "\xi_{n+1}"] \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

og anta at hvert kvadrat kommuterer opp til en valgt homotopi. Det betyr at for hver n finnes en homotopi $H_t^n : X_n \longrightarrow Y_{n+1}$ slik at $H_0^n = g_n \circ \xi_n$ og $H_1^n = \xi_{n+1} \circ f_n$. Da kan man definere en avbildning $\underset{n}{Tel}\,(\xi_n, H^n) : \underset{n,f_n}{Tel}\, X_n \longrightarrow \underset{n,g_n}{Tel}\, Y_n$ ved formelen

$$\underset{n}{Tel}\,(\xi_n, H^n)(t,x) = \begin{cases} (2t-n, \xi_n(x)) & ; t \in [n, n+\frac{1}{2}] \\ (n+1, H^n_{2(t-n)-1}(x)) & ; t \in [n+\frac{1}{2}, n+1] \end{cases}$$

Merk at $\underset{n}{Tel}\,(\xi_n, H^n)$ respekterer identifikasjonene som ble gjort under teleskopkonstruksjonen.

Lemma 11 *Dersom alle avbildningene ξ_n induserer isomorfi på homotopigrupper, er $\underset{n}{Tel}\,(\xi_n, H^n)$ en homotopiekvivalens.*

Bevis: Det er klart inklusjonen $Y_N \hookrightarrow \underset{n \leq N, g_n}{Tel}\, Y_n$ av rommet Y_N inn i det endelige avbildningsteleskopet av lengde N, er en homotopiekvivalens. For å vise at $\underset{n}{Tel}\,(\xi_n, H^n)$ er en surjeksjon på homotopi, la $\omega : S^k \longrightarrow \underset{n,g_n}{Tel}\, Y_n$ representere et element $[\omega] \in \pi_* \underset{n,g_n}{Tel}\, Y_n$. Siden bildet av ω er kompakt, er det inneholdt i et endelig underteleskop $\underset{n \leq N, g_n}{Tel}\, Y_n$ for N stor nok. Vi har med andre ord en faktorisering $\omega = in_Y \circ \omega'$ der $in_Y : \underset{n \leq N, g_n}{Tel}\, Y_n \hookrightarrow \underset{n,g_n}{Tel}\, Y_n$ er inklusjonen. Har da følgende diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & & S^k \arrow[dl, dotted, "\omega'"'] \arrow[d, "\omega"] \\
Y_N \arrow[r, hook] & \underset{n\leq N, g_n}{Tel}\ Y_n \arrow[r, hook, "in_Y"] & \underset{n, g_n}{Tel}\ Y_n \\
X_N \arrow[u, "\simeq"', "\xi_N"] \arrow[r, hook] & \underset{n\leq N, f_n}{Tel}\ X_n \arrow[u] \arrow[r, hook, "in_X"] & \underset{n, f_n}{Tel}\ X_n \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

De to kvadratene kommuterer opp til homotopi og inklusjonene til venstre er som sagt homotopiekvivalenser. Det følger at avbildningen av de endelige teleskopene er en homotopiekvivalens. Vi kan derfor løfte ω' til en $\omega'' : S^k \longrightarrow \underset{n\leq N, f_n}{Tel}\ X_n$, som ved komposisjon med in_X, gir oss den ønskede løftningen av ω. Injektivitet vises helt analogt ved å begrense til et endelig teleskop.

Siden avbildningsteleskopet av en følge CW-komplekser åpenbart er et CW-kompleks selv, betyr dette at $\underset{n}{Tel}\ (\xi_n, H^n)$ er en homotopiekvivalens.

□

Korollar 1 *Gitt en følge av CW-komplekser og kontinuerlige avbildninger*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X_{2n-1} \arrow[r, "f_{2n-1}"] \arrow[rr, bend right, "S_n"'] & X_{2n} \arrow[r, "f_{2n}"] & X_{2n+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

og anta at $S_n \simeq f_{2n} \circ f_{2n-1}$ for alle $n \geq 1$. Da finnes en homotopiekvivalens

$$\underset{n, f_n}{Tel}\ X_n \simeq \underset{n, S_n}{Tel}\ X_{2n-1}$$

Bevis: Det er klart at $\underset{n, f_n}{Tel}\ X_n \simeq \underset{n, f_{2n}\circ f_{2n-1}}{Tel}\ X_{2n-1}$. Bruk nå lemma 11.

□

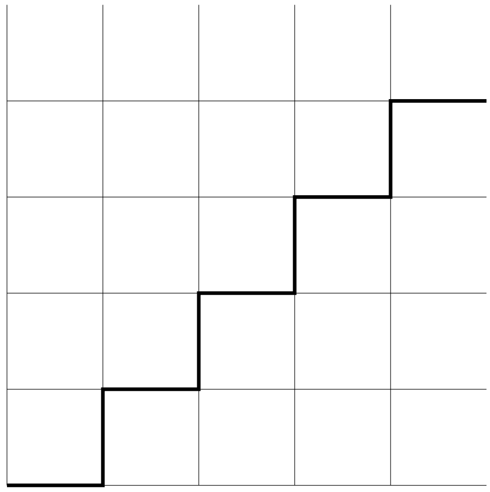
Lemma 12 *Gitt $\{X_{p,q}\}_{p,q\in\mathbb{N}}$ og avbildninger $f_{p,q}$ og $g_{p,q}$ for alle p, q slik at hvert kvadrat*

$$\begin{tikzcd}
X_{p,q+1} \arrow[r, "f_{p,q+1}"] & X_{p+1,q+1} \\
X_{p,q} \arrow[u, "g_{p,q}"] \arrow[r, "f_{p,q}"'] \arrow[ur, phantom, "\boxed{H^{p,q}}"] & X_{p+1,q} \arrow[u, "g_{p+1,q}"']
\end{tikzcd}$$

kommuterer opp til en valgt homotopi $H^{p,q}$. La $q \geq 1$, og la $Tel\ X_q$ være avbildningsteleskopet $\underset{p,f_{p,q}}{Tel}\ X_{p,q}$. La så $g_q : Tel\ X_q \longrightarrow Tel\ X_{q+1}$ være avbildningen $\underset{p}{Tel}\ (X_{p,q}, H^{p,q})$. Da har vi en homotopiekvivalens

$$\underset{q,g_q}{Tel}\ (Tel\ X_q) \simeq Tel\left(\cdots \longrightarrow X_{n,n} \xrightarrow{f_{n,n}} X_{n+1,n} \xrightarrow{g_{n+1,n}} X_{n+1,n+1} \longrightarrow \cdots\right)$$

mellom det doble avbildningsteleskopet og avbildningsteleskopet av en 'trapp'. Se figur 8.



Figur 8:

Bevis: Avbildningsteleskopet av 'trappen' sitter som underrom av det doble teleskopet. Vi ønsker å vise at inklusjonen er en ekvivalens ved å konstruere en deformasjonsretraksjon. Det doble avbildningsteleskopet kan skrives som den disjunkte unionen

$$\coprod_{m,n\geq 1} [m, m+1] \times [n, n+1] \times X_{m,n}$$

med visse identifikasjoner: Dersom $(s,t) \in [m, m+1] \times [n, n+1]$, skal

$$(m+1, t, x) \sim (m+1, t, f_{m,n}(x))$$
$$(s, n+1, x) \sim \begin{cases} (2s-m, n+1, g_{m,n}(x)) & ; s \in [m, m+\frac{1}{2}] \\ (m+1, n+1, H^{m,n}_{2(s-m)-1}(x)) & ; s \in [m+\frac{1}{2}, m+1] \end{cases}$$

Definerer så to deformasjonsretraksjoner, α_ω og β_ω, begge avbildninger $[0,1]^2 \longrightarrow [0,1]^2$. α_ω skal være en deformasjonsretraksjon av inklusjonen $[0,1] \times \{0\} \cup \{1\} \times [0,1] \subset [0,1]^2$, og β_ω skal være en deformasjonsretraksjon av inklusjonen $\{0\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{1\} \subset [0,1]^2$. Se figur 9.

La K_q være det endelige underteleskopet bestående av

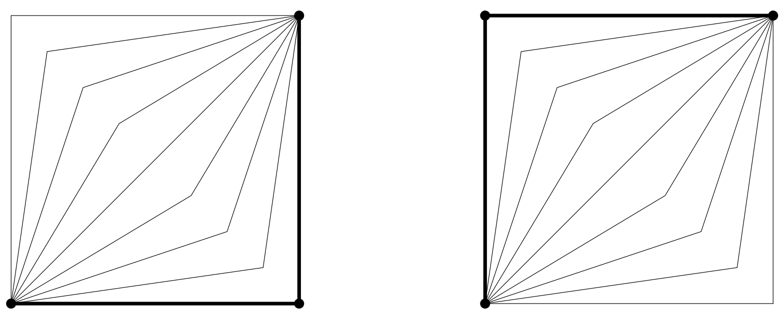
$$\coprod_{1 \leq m,n \leq q} [m, m+1] \times [n, n+1] \times X_{m,n}$$

underlagt de samme identifikasjoner som over. Vi har et grensesystem

$$\begin{tikzcd}
K_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & K_q \arrow[r] & K_{n+1} \arrow[r] & \cdots \\
S_1 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots \arrow[r] & S_q \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\circ"] & S_{q+1} \arrow[r] \arrow[u] & \cdots
\end{tikzcd}$$

der alle avbildningene er indusert av inklusjoner. Det er klart at den direkte grensen $\underset{q}{colim}(K_q)$ er homeomorf med det doble teleskopet, og at $\underset{q}{colim}(S_q)$ er homeomorf med trappen. Videre er alle avbildningene $S_q \longrightarrow K_q$ er homotopiekvivalenser. (Her brukes deformasjonene definert over til å suksessivt kollapse kvadratene ned på trappen.) Det følger at grenseavbildningen også er en ekvivalens.

$\square$



Figur 9: α_ω og β_ω

6 Den doble grensen over $\overline{\sigma}$ og $\underline{\sigma}$

Vi vil i dette avsnittet vise at kvadratet

$$\begin{array}{ccc} P(X,X') & \xrightarrow{\underline{\sigma}} & P(X\times J, X'\times J_2) \\ \downarrow{\scriptstyle\overline{\sigma}} & & \downarrow{\scriptstyle\overline{\sigma}} \\ P(J\times X, J_2\times X') & \xrightarrow{\underline{\sigma}} & P(J\times X\times J, J_2\times X'\times J_2) \end{array}$$

er kommutativt opp til en valgt homotopi for alle X. Det viser seg at PL-tilfellet er lettere å skrive ned enn for $CAT{=}DIFF$. I dette avsnittet skal vi derfor først se på det stykkevis lineære tilfellet.

Vi vil regne ut hva som skjer med mangfoldigheten M tilhørende en partisjon (M,F,N) over X etter å ha anvendt komposisjonen $\overline{\sigma}\circ\underline{\sigma}$. Observér imidlertid først at

$$\begin{aligned} M_{(X\times J, X'\times J_2)}(h,t) &= X'\times J_2\times[a,h]\cup cl\;(X\times J\smallsetminus X'\times J_2)\times[a,t] \\ &= X'\times J_2\times[a,h]\cup cl\;(X\smallsetminus X')\times J_2\times[a,t]\cup X\times J_{3-2}\times[a,t] \\ &= M_{(X,X')}(h,t)\times J_2\cup X\times J_{3-2}\times[a,t] \end{aligned}$$

Med denne observasjonen for hånden er vi rede til å regne ut:

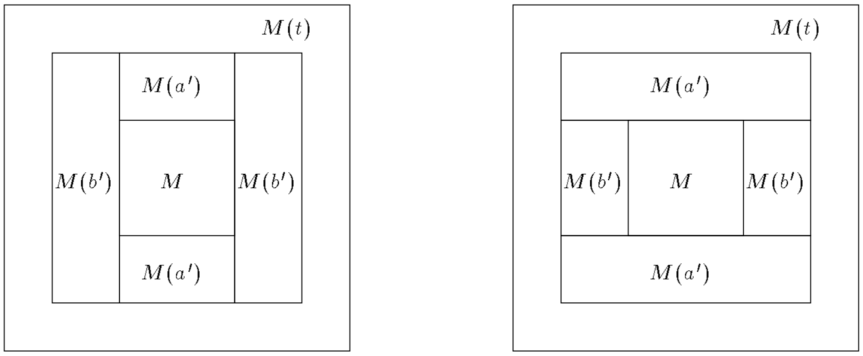
$$\begin{aligned} \overline{\sigma}(\underline{\sigma}M) = \quad & \big(J_1\times\underline{\sigma}(M)\big) \\ \cup\quad & \big(J_{2-1}\times M_{(X\times J,X'\times J_2)}(b',t)\big) \\ \cup\quad & \big(J_{3-2}\times X\times J\times[a,t]\big) \\ =\quad & \big(J_1\times M\times J_1\big)\cup\big(J_1\times M_{(X,X')}(a',t)\times J_{2-1}\big)\cup\big(J_1\times X\times J_{3-2}\times[a,t]\big) \\ \cup\quad & \big(J_{2-1}\times M_{(X,X')}(b',t)\times J_2\big)\cup\big(J_{2-1}\times X\times J_{3-2}\times[a,t]\big) \\ \cup\quad & \big(J_{3-2}\times X\times J\times[a,t]\big) \\ =\quad & \big(J_1\times M\cup J_{2-1}\times M_{(X,X')}(b',t)\cup J_{3-2}\times X\times[a,t]\big)\times J_1 \\ \cup\quad & \big(J_1\times M_{(X,X')}(a',t)\cup J_{2-1}\times M_{(X,X')}(b',t)\cup J_{3-2}\times X\times[a,t]\big)\times J_{2-1} \\ \cup\quad & J\times X\times J_{3-2}\times[a,t] \\ =\quad & \Big(\overline{\sigma}(M)\times J_1\Big)\cup\Big(W_{b'}\times J_{2-1}\Big)\cup\Big(J\times X\times J_{3-2}\times[a,t]\Big) \end{aligned}$$

Her er W_h definert som

$$W_h := \Big(J_1\times M(a')\Big)\cup\Big(J_{2-1}\times M(h)\Big)\cup\Big(J_{3-2}\times X\times[a,t]\Big)$$

(Se figur 11.) Tilsvarende regning viser at

$$\underline{\sigma}(\overline{\sigma}M) = \Big(\overline{\sigma}(M)\times J_1\Big)\cup\Big(W_{a'}\times J_{2-1}\Big)\cup\Big(J\times X\times J_{3-2}\times[a,t]\Big)$$



Figur 10: Bildet av sammensetningene $\overline{\sigma} \circ \underline{\sigma}$ og $\underline{\sigma} \circ \overline{\sigma}$

Se figur 10. Vi ønsker nå å si at vi kan komme fra $\overline{\sigma}\underline{\sigma}(M)$ til $\underline{\sigma}\overline{\sigma}(M)$ ved å 'senke høyden' over området $J_{2-1} \times X' \times J_{2-1}$ fra b' til a'. Mer presist ønsker vi å si at

$$Q_h(M) := \Big(\overline{\sigma}(M) \times J_1\Big) \cup \Big(W_h \times J_{2-1}\Big) \cup \Big(J \times X \times J_{3-2} \times [a,t]\Big)$$

bestemmer en lokalt triviell 1-parameter familie av partisjoner når h varierer fra b' til a'. Dette er ikke opplagt. Man kunne tenke seg at man fikk problemer med mangfoldighetsstrukturen for punkter inneholdt i $\partial J_2 \times X \times \partial J_2 \times I$. Det er nettopp i slike punkter at området vi ønsker å forandre grenser til den fortykkede kopien av partisjonen (M, F, N) som kan være hva som helst.

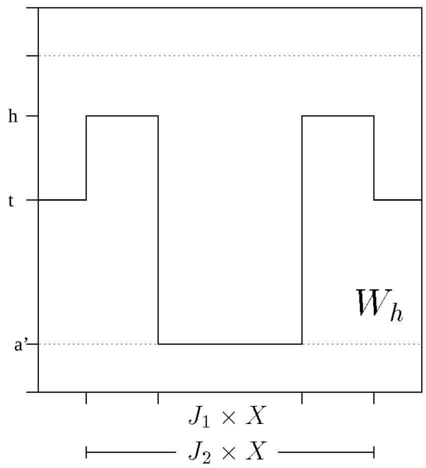
For å vise dette likevel ikke er problematisk, skal vi bruke lemma 4: La Φ_h være en PL-familie automorfier på $J \times X \times I$ som er slik at $\Phi_h(W_h) = J \times X \times [a, a']$ for alle $h \in [a', b']$. At en slik familie finnes kan vises på samme måte som i avsnitt 3.2. Det er derfor klart at familien

$$W := \bigcup_{s \in [a', b']} \{s\} \times W_s \subset [a', b'] \times J \times X \times I$$

er en lokalt triviell 1-parameter familie av undermangfoldigheter. Videre er det klart at $[a', b'] \times \overline{\sigma}(M)$ er en triviell familie siden den er konstant. Lemma 4 sier da at $([a', b'] \times \overline{\sigma}(M) \times J_1) \cup (W \times J_{2-1})$ er en lokalt triviell 1-parameter familie undermangfoldigheter, og det følger at familien bestemt av $Q_h(M)$ er lokalt triviell.

Dette argumentet lar seg uten forandring generalisere til flere parametre, og konklusjonen blir dermed at $\underline{\sigma} \circ \overline{\sigma} \simeq \overline{\sigma} \circ \underline{\sigma}$.

Når vi snakker om den doble grensen over $\underline{\sigma}$ og $\overline{\sigma}$ kan vi ved lemma 12 på side 34 like godt erstatte denne med den sekvensielle grensen over sammensetningen $\overline{\sigma} \circ \underline{\sigma}$. Det som imidlertid tjener våre hensikter best er å definere en justert stabilisering som følger:



Figur 11: Partisjonen bestemt av W_h

Definisjon 12 *La den doble stabiliseringsavbildningen*

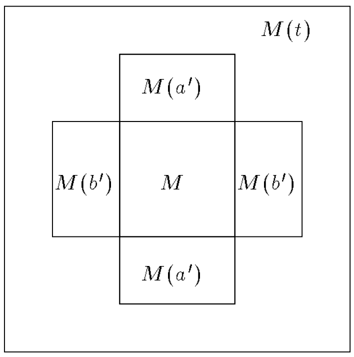
$$\sigma^2 : P(X, X') \longrightarrow P(J \times X \times J, J_2 \times X' \times J_2)$$

være definert ved at den tar en partisjon $(M, F, N) \in P(X, X')$ *til*

$$\begin{aligned} \sigma^2 M = J_1 \times M \times J_1 \\ \cup J_1 \times M(a') \times J_{2-1} \\ \cup J_{2-1} \times M(b') \times J_1 \\ \cup J_{3-1} \times M(t) \times J_{3-1} \\ \cup J_{3-2} \times M(t) \times J_1 \\ \cup J_1 \times M(t) \times J_{3-2} \end{aligned}$$

Se figur 12.

Går man denne formelen etter i sømmene ser man at $\sigma^2(M)$ ikke er noe annet enn $Q_t(M)$ som befinner seg omtrent midt i 1-parameterfamilien definert over, så vi har at $\underline{\sigma}\overline{\sigma} \simeq \sigma^2 \simeq \overline{\sigma}\underline{\sigma}$. Det følger at grensen $\underset{m,\sigma^2}{Tel}\ P(J^m \times X \times J^m, J_2^m \times X' \times J_2^m)$ har den riktige homotopitypen.



Figur 12: Den doble stabliseringen

7 Stabilisering i den glatte kategorien

Vi skal nå gyve løs på den glatte kategorien. Her må dessverre jobbe litt mer for å komme frem til en tilsvarende dobbel stabiliseringsavbildning som i PL-tilfellet.

7.1 Definisjoner

La oss først kommentere hvordan vi har tenkt å presentere normalfeltene. Dersom vi for eksempel ser på partisjoner over $J \times X$, vil en normalisering av fronten være et vektorfelt på $J \times X \times I$, dvs. en seksjon i tangentbunten

$$T(\mathbb{R} \times X \times \mathbb{R})\big|_{J \times X \times I} \cong (J \times \mathbb{R}) \times T(X) \times (I \times \mathbb{R})$$

I dette tilfellet vil vi identifisere en slik seksjon med en funksjon $J \times X \times I \longrightarrow \mathbb{R} \times T(X) \times \mathbb{R}$ som sender (x, p, y) inn i fiberen T_pX over $p \in X$. Dette gjør notasjonen overkommelig.

La nå $\phi : \partial X \times [0, 1] \longrightarrow X$ være en glatt kraveembeddingen slik at $\phi(-, 0) = id_{\partial X}$. Da definerer vi en stigende følge av glatte kodimensjon-0 undermangfoldigheter ved formelen

$$X_i := cl\ (X \setminus \phi(\partial X, [0, 2^{1-i}]))$$

Tilsvarende definerer vi $J_i \subset J$ ved formelen $J_i := [-c_i, c_i]$, der $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$ er en valgt følge $0 = c_0 < c_1 < \ldots < c_\infty = 1$. Det er klart at $X_i \subset int\ X_{i+1}$ og $J_i \subset int\ J_{i+1}$ for alle $i \geq 1$. For å forenkle notasjonen lar vi $X_\infty := X$ (resp. $J_\infty := J$) og skriver X_{i-j} (resp. J_{i-j}) for $cl\ (X_i \setminus X_j)$ (resp. $cl\ (J_i \setminus J_j)$) for alle $\infty \geq i > j \geq 1$.

7.1.1 Bumpfunksjoner og normalisering

La $\alpha_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$ være en glatt funksjon for alle i slik at

$$\alpha_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in X_i \\ 0 & x \in X_{\infty-(i+1)} \end{cases}$$

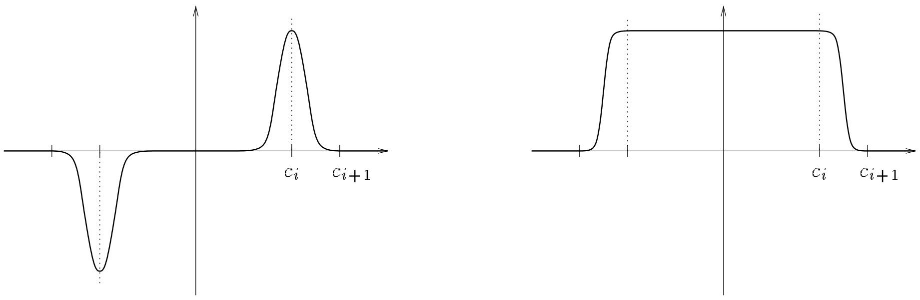
I tillegg skal $0 < \alpha_i(x) < 1$ for $x \in int\ X_{(i+1)-i}$. La $\beta_i : J \longrightarrow \mathbb{R}$ være en glatt funksjon for hver i slik at

$$\beta_i(t) = \begin{cases} 1 & t \in J_i \\ 0 & t \in J_{\infty-(i+1)} \end{cases}$$

I tillegg skal $0 < \beta_i(t) < 1$ for $t \in int\ J_{(i+1)-i}$. La $f_i : J \longrightarrow \mathbb{R}$ være en glatt funksjon for hver i slik at

$$f_i(t) = \begin{cases} -1 & t = -c_i \\ 1 & t = c_i \\ 0 & t \in J \smallsetminus \Big((-c_{i+1}, -c_{i-1}) \cup (c_{i-1}, c_{i+1})\Big) \end{cases}$$

Se figur 13.



Figur 13: Funksjonene f_i og β_i

7.2 Normalisering av standardpartisjoner

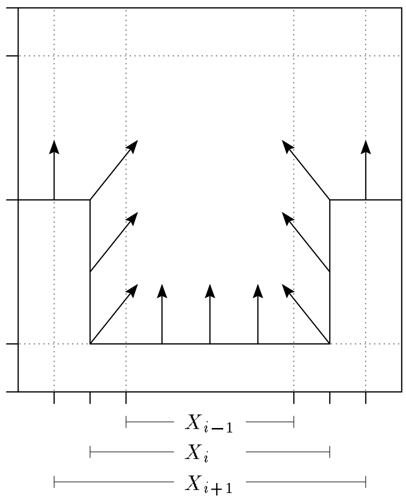
Konstruksjonen av stabiliseringsavbildningene i PL- tilfellet besto for det meste i å fortykke partisjoner og lime på standardpartisjoner i hver ende. Med standardpartisjoner henviser vi her til partisjonene definert ved $M_{(X,X_i)}(h,t)$ for $h = a'$ og $h = b'$. Se definisjon 5, side 15. På mangfoldighetsnivå skal stabilisering i det glatte tilfellet gjøres på lignende vis. I tillegg skal vi gi mening til hva stabiliseringen skal gjøre med et normaliserende vektorfelt. Vi kommer da til å få behov for å ha eksplisitte normaliserende vektorfelt for blant annet disse standardpartisjonene.

Velg derfor et glatt vektorfelt g_i på X for alle $i \geq 1$, slik at g_i normaliserer $\partial X_i \subset X$ og peker ut av X_i. I tillegg krever vi også at $supp(g_i) \subset (X_{i+1} \smallsetminus X_{i-1})$ for alle $i \geq 1$. For å konstruere g_i'ene kan vi for eksempel bruke tosidige kraver om de glatte undermangfoldighetene $\partial X_i \subset X$.

Vi vil nå vise hvordan feltet g_i gir opphav til et normaliserende vektorfelt på partisjonen $M_{(X,X_i)}(b',t)$. Anta nå at vi har gitt et glatt vektorfelt $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ på $X \times I$ slik at

(i) $\omega_1(p,t) = g_i(p)$ for alle $p \in \partial X_i$

(ii) $\omega_2(p,t) > 0$ for alle $(p,t) \in F_{(X,X_i)}(b',t)$



Figur 14: Det normaliserende feltet til $M_{(X,X_i)}(a',t)$

Da er det klart at ω normaliserer $M_{(X,X_i)}(b',t)$. Likeledes vil et felt $\omega' = (\omega'_1, \omega'_2)$ på $X \times I$ som oppfyller

(i) $\omega'_1(p,t) = -g_i(p)$ for alle $p \in \partial X_i$

(ii) $\omega'_2(p,t) > 0$ for alle $(p,t) \in F_{(X,X_i)}(a',t)$

normalisere $M_{(X,X_i)}(a',t)$. Se figur 14.

7.3 Den doble grensen over $\underline{\sigma}$ og $\overline{\sigma}$

Vi vil i dette avsnittet gjøre en del valg som er nødvendige for å gi mening til nedre og øvre stabilisering. Gitt $m, n \geq 0$ og $i \geq 1$. For å gjøre notasjonen enklere, lar vi

$$A^{m,n} := J^m \times X \times J^n$$
$$A_i^{m,n} := J_i^m \times X_i \times J_i^n$$

Da er $A_i^{m,n} \subset A^{m,n}$ en kodimensjon-0 undermangfoldighet for alle $i \geq 0$ slik at $cl\,(A^{m,n} \setminus A_i^{m,n})$ er en lukket kraveomegn om randen. La så $r = 2(m+n)+1$. Vi ønsker å gi mening til $\underline{\sigma}$ og $\overline{\sigma}$ i den glatte kategorien, og vise at kvadratet

$$\begin{array}{ccc}
P(A^{m,n}, A_r^{m,n}) & \xrightarrow{\underline{\sigma}} & P(A^{m,n+1}, A_{r+2}^{m,n+1}) \\
\downarrow{\scriptstyle\overline{\sigma}} & & \downarrow{\scriptstyle\overline{\sigma}} \\
P(A^{m+1,n}, A_{r+2}^{m+1,n}) & \xrightarrow{\underline{\sigma}} & P(A^{m+1,n+1}, A_{r+4}^{m+1,n+1})
\end{array}$$

kommuterer opp til en valgt homotopi. Legg merke til at kraveomegnene om ∂X krymper for hver gang vi stabiliserer. En av grunnene til at dette skjer, er at når vi for eksempel nedrestabiliserer og ønsker å lime på en standardpartisjon gitt ved $M(a')$, må vi velge en $M(a')$ som er standard av høyde t over en mindre krave. Grunnen til dette er at vi så ønsker å finne et normaliserende vektorfelt, og trenger derfor å vite at alle 'kantene' i $M(a')$ ligger i et område der det opprinnelige feltet ω er konstant lik $\frac{d}{dt}$.

Vi kan nå definere nedre og øvre stabilisering på mangfoldighetsnivå:

Definisjon 13 *Nedre stabilisering tar en partisjon (M, F, N) av høyde t over kraven $A^{m,n} \setminus A_r^{m,n}$ til $(\underline{\sigma} M, \underline{\sigma} F, \underline{\sigma} N)$, der*

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}(M) = \; & M \times J_1 \\ & \cup M_{(A^{m,n}, A_{r+1}^{m,n})}(a', t) \times J_{2-1} \\ & \cup M(t) \times J_{\infty - 2}\end{aligned}$$

Tilsvarende definerer følgende formel øvre stabilisering:

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(M) = \; & J_1 \times M \\ & \cup J_{2-1} \times M_{(A^{m,n}, A_{r+1}^{m,n})}(b', t) \\ & \cup J_{\infty - 2} \times M(t)\end{aligned}$$

Husk at $r = 2(m+n)+1$.

(Merk at vi i definisjonen for $\underline{\sigma}$ har gjort identifikasjonen $X \times I \times J \cong X \times J \times I$.)

Oppgaven blir nå å finne normaliserende vektorfelt til disse stabilserte partisjonene. Etter å ha valgt en kodimensjon-0 undermangfoldighet for hver $i \geq 0$ i alle dimensjoner trenger vi, for å definere normalfelt, å velge tilhørende bumpfunksjoner. La derfor

$$\tilde{\alpha}_i^{m,n}(x, p, y) := \beta_i(x_1) \cdot \ldots \cdot \beta_i(x_m) \cdot \alpha_i(p) \cdot \beta_i(y_1) \cdot \ldots \cdot \beta_i(y_n)$$

for alle $(x, p, y) \in J^m \times X \times J^n = A^{m,n}$. Da er $\tilde{\alpha}_i^{m,n}$ en bumpfunksjon som er $\equiv 1$ på hele $A_i^{m,n}$ og har support inneholdt i $A_{i+1}^{m,n}$.

Den siste ingrediensen vi trenger er å velge en normalisering til standardpartisjonene gitt ved $M_{(A^{m,n}, A_i^{m,n})}(h, t)$ for $h = a', b'$. Ved å etterligne det vi gjorde i avsnitt 7.2 definerer vi nå

$$\tilde{g}_i^{m,n}(x, p, y) := \tilde{\alpha}_i^{m,n}(x, p, y) \cdot \big(f_i(x_1), \ldots, f_i(x_m), g_i(p), f_i(y_1), \ldots, f_i(y_n)\big)$$

for alle $(x, p, y) \in A^{m,n}$. Vi ser straks at $\tilde{g}_i^{m,n}$ normaliserer $\partial A_i^{m,n}$, og peker *ut* av $A_i^{m,n}$. Siden vi multipliserer med bumpfunksjonen $\tilde{\alpha}_i^{m,n}$ vil $supp(\tilde{g}_i^{m,n}) \subset$

$supp(\tilde{\alpha}_i^{m,n}) \subset A_{i+1}^{m,n}$. Det følger dessuten fra tilsvarende egenskaper for f_i og α_i, at $supp(\tilde{g}_i^{m,n}) \subset A_{i+1}^{m,n} \setminus A_{i-1}^{m,n}$.

Nå er vi endelig klare til å fullføre definisjonen av stabiliseringsavbildningene i den glatte kategorien:

Definisjon 14 *La $m, n \geq 0$, og sett $r = 2(m+n)+1$. Anta at $(M, F, N, \omega) \in P(A^{m,n}, A_r^{m,n})$. Normaliseringene av $\underline{\sigma}(M, F, N)$ og $\overline{\sigma}(M, F, N)$*

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(\omega) &: A^{m,n} \times J \times I \longrightarrow T(A^{m,n}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \overline{\sigma}(\omega) &: J \times A^{m,n} \times I \longrightarrow \mathbb{R} \times T(A^{m,n}) \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

skal da være gitt ved $\underline{\sigma}(\omega) = (a_1, a_2, a_3)$ og $\overline{\sigma}(\omega) = (b_1, b_2, b_3)$ der

$$\begin{aligned} a_1(z, y, t) &= \beta_1(y)\omega_1(z, t) - \beta_2(y)\tilde{g}_{r+1}^{m,n}(z) \\ a_2(z, y, t) &= \tilde{\alpha}_{r+1}^{m,n}(z)\big(f_1(y) - f_2(y)\big) \\ a_3(z, y, t) &= \beta_1(y)\omega_2(z, t) + 1 - \beta_1(y) \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} b_1(x, z, t) &= \tilde{\alpha}_{r+1}^{m,n}(z)\big(-f_1(x) + f_2(x)\big) \\ b_2(x, z, t) &= \beta_1(x)\omega_1(z, t) + \beta_2(x)\tilde{g}_{r+1}^{m,n}(z) \\ b_3(x, z, t) &= \beta_1(x)\omega_2(z, t) + 1 - \beta_1(x) \end{aligned}$$

for alle $x \in J, z \in A^{m,n}, y \in J$ og $t \in I$.

For å forstå hva de forskjellige komponentene i formlene gjør, vil vi gi en kort forklaring. Ta for eksempel nedre stabilisering: Vektorfeltet (a_1, a_3) normaliserer undermangfoldigheten $M \times int\ J_1$. Komponenten a_2 gjør at feltet peker vekk fra $M \times \partial J_1$, og bumpfunksjonene i a_3 gjør at feltet er lik $\frac{d}{dt}$ på $X \times J_{\infty-2} \times I$. Vi vil i det neste avsnittet vise at feltene faktisk normaliserer de normaliserte partisjonene.

7.3.1 Normaliseringsegenskapene til $\underline{\sigma}(w)$ og $\overline{\sigma}(w)$

Vi vil i dette avsnittet vise at definisjonene 13 og 14 virkelig er kompatible, det vil si at de til sammen gir opphav til veldefinerte stabiliseringsavbildninger.

Anta derfor at $(M, F, N, \omega) \in P(A^{m,n}, A_r^{n,n})$ er en normalisert partisjon av høyde t over randen. Det er det for det første klart at partisjonen bestemt av $\underline{\sigma}(M)$ vil være standard av høyde t over kraven $A^{m,n+1} \setminus A_{r+1}^{m,n+1}$, som er mer enn nok. Vi krever kun at den er standard over kraven $A^{m,n+1} \setminus A_{r+2}^{m,n+1}$. Vektorfeltet $\underline{\sigma}(\omega) = (a_1, a_2, a_3)$ er derimot konstant lik $\frac{d}{dt}$ utenfor

$A^{m,n}_{r+2} \times J_3 \subset A^{m,n+1}_{r+2}$, siden a_1 og a_2-komponentene forsvinner her. Tilsvarende betraktninger gjør rede for øvre stabilisering.

Vi vil nå vise at $(\underline{\sigma}(M), \underline{\sigma}(F), \underline{\sigma}(N), \underline{\sigma}\omega)$ er en normalisert partisjon. Til å gjøre dette ønsker vi å bruke eksempelet fra avsnitt 4.6 (side 30). La $(s_1, s_2, s_3) = (-c_2, -c_1, 0)$. Vi vil vise at $\underline{\sigma}\omega$ normaliserer $M(a') \times [s_1, s_2] \cup M \times [s_2, s_3]$. De andre tilfellene er helt analoge.

For det første er $M(a') \subset M$. Dessuten er det klart at vektorfeltet (a_1, a_3) normaliserer både $M(a')$ og M. Når det gjelder a_2, så har vi to tilfeller. For $(z, s_2, t) \in A^{m,n}_{r+1} \times \{s_2\} \times I$ er $a_2(z, s_2, t) = -1$, slik vi krever i §4.6. Dersom $z \notin A^{m,n}_{r+1}$, spiller det ingen rolle hva (a_1, a_2) er, siden partisjonen lokalt er standard av en eller annen høyde. Det eneste vi krever, er at $b_3 > 0$. I tillegg merker vi at $\underline{\sigma}\omega$ oppfyller standardbetingelsene $(i) - (ii)$ i definisjon 8 (side 23), og vi er fremme.

Helt analogt vises at $\overline{\sigma}\omega$ er en normalisering av partisjonen $\overline{\sigma}(M, F, N)$.

7.3.2 Sammensetningen $\overline{\sigma} \circ \underline{\sigma}$

Nå som vi har definert øvre og nedre stabilisering, fortsetter vi som i PL-tilfellet med å undersøke komposisjon $\overline{\sigma} \circ \underline{\sigma}$.

La $(M, F, N, \omega) \in P(A^{m,n}, A^{m,n}_r)$. På mangfoldighetsnivå er utregningen nesten identisk som i PL-tilfellet. Forskjellen ligger i at standardmangfoldighetene gitt ved $M_{(A^{m,n}, A^{m,n}_r)}(h, t)$ for $h = a', b'$ er standard av høyde t over en mindre og mindre krave om randen $\partial A^{m,n}$ avhengig av m og n. Figur 15 gir et bilde av komposisjonen $\overline{\sigma}\underline{\sigma}(M)$.

Vi skal nå regne ut normaliseringen til denne partisjonen. Anta at

$$\tilde{\omega} = ((\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2), \tilde{\omega}_3) : (A^{m,n} \times J) \times I \longrightarrow (T(A^{m,n}) \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$$

er normaliseringen til $(M', F', N') \in P(A^{m,n+1}, A^{m,n+1}_{r+2})$. Vi ønsker først å regne ut $\overline{\sigma}(\tilde{\omega})$. Da kan vi beskrive $\overline{\sigma}(\tilde{\omega})$ som feltet

$$(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3) : (J \times A^{m,n+1}) \times I \longrightarrow (\mathbb{R} \times T(A^{m,n+1})) \times \mathbb{R}$$

der

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_1(x, \tilde{z}, t) &= \tilde{\alpha}^{m,n+1}_{r+3}(\tilde{z})\big(-f_1(x) + f_2(x)\big) \\
\tilde{b}_2(x, \tilde{z}, t) &= \beta_1(x)\Big(\tilde{\omega}_1(\tilde{z}, t), \tilde{\omega}_2(\tilde{z}, t)\Big) + \beta_2(x)\tilde{g}^{m,n+1}_{r+3}(\tilde{z}) \\
\tilde{b}_3(x, \tilde{z}, t) &= \beta_1(x)\tilde{\omega}_3(\tilde{z}, t) + 1 - \beta_1(x)
\end{aligned}$$

i følge definisjon 14 for alle $x \in J$ og $\tilde{z} = (z, y) \in A^{m,n} \times J = A^{m,n+1}$.

Merk nå at slik vi definerte $\tilde{g}^{m,n+1}_i$ på side 44, følger det at

$$\tilde{g}^{m,n+1}_i(\tilde{z}) = \Big(\beta_i(y) \cdot \tilde{g}^{m,n}_i(z)\ ,\quad \tilde{\alpha}^{m,n+1}_i(\tilde{z}) \cdot f_i(y)\Big)$$

for alle $\tilde{z} = (z, y) \in A^{m,n} \times J = A^{m,n+1}$. Da substituerer vi $\tilde{g}^{m,n+1}_{r+3}$ med dette uttrykket, og får

$$\tilde{b}_1(x, \tilde{z}, t) = \tilde{\alpha}^{m,n+1}_{r+3}(\tilde{z})\big(- f_1(x) + f_2(x)\big)$$
$$\tilde{b}_2(x, \tilde{z}, t) = \beta_1(x)\Big(\tilde{\omega}_1(\tilde{z}, t), \tilde{\omega}_2(\tilde{z}, t)\Big) + \beta_2(x)\Big(\beta_{r+3}(y) \cdot \tilde{g}^{m,n}_{r+3}(z)\ ,\quad \tilde{\alpha}^{m,n+1}_{r+3}(\tilde{z}) \cdot f_{r+3}(y)\Big)$$
$$\tilde{b}_3(x, \tilde{z}, t) = \beta_1(x)\tilde{\omega}_3(\tilde{z}, t) + 1 - \beta_1(x)$$

Vi ser nå at feltet $(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3)$ har formen $(v_1, (v_2, v_3), v_4)$ hvor

$$\begin{aligned}
v_1(x, \tilde{z}, t) &= \tilde{\alpha}^{m,n+1}_{r+3}(\tilde{z}) \cdot \big(- f_1(x) + f_2(x)\big) \\
v_2(x, \tilde{z}, t) &= \beta_1(x) \cdot \tilde{\omega}_1(\tilde{z}, t) + \beta_2(x)\beta_{r+3}(y) \cdot \tilde{g}^{m,n}_{r+3}(z) \\
v_3(x, \tilde{z}, t) &= \beta_1(x) \cdot \tilde{\omega}_2(\tilde{z}, t) + \beta_2(x)\tilde{\alpha}^{m,n+1}_{r+3}(\tilde{z}) \cdot f_{r+3}(y) \\
v_4(x, \tilde{z}, t) &= \beta_1(x) \cdot \tilde{\omega}_3(\tilde{z}, t) + 1 - \beta_1(x)
\end{aligned}$$

for alle $(x, (z, y), t) \in J \times (A^{m,n} \times J) \times I = A^{m+1,n+1} \times I$. Dette er altså resultatet av å øvrestabilisere normaliseringen $\tilde{\omega}$. Da gjenstår det bare å sette inn for $\tilde{\omega} = \underline{\sigma}\omega$, se definisjon 14, og vi får at $\overline{\sigma}\underline{\sigma}(\omega) = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ der

$$v_1(x, z, y, t) = \tilde{\alpha}^{m,n+1}_{r+3}(z, y) \cdot \big(- f_1(x) + f_2(x)\big)$$
$$v_2(x, z, y, t) = \beta_1(x) \cdot \Big(\beta_1(y)\omega_1(z, t) - \beta_2(y)\tilde{g}^{m,n}_{r+1}(z)\Big) + \beta_2(x)\beta_{r+3}(y) \cdot \tilde{g}^{m,n}_{r+3}(z)$$
$$v_3(x, z, y, t) = \beta_1(x) \cdot \Big(\tilde{\alpha}^{m,n}_{r+1}(z)\big(f_1(y) - f_2(y)\big)\Big) + \beta_2(x)\tilde{\alpha}^{m,n+1}_{r+3}(z, y) \cdot f_{r+3}(y)$$
$$v_4(x, z, y, t) = \beta_1(x) \cdot \Big(\beta_1(y)\omega_2(z, t) + 1 - \beta_1(y)\Big) + 1 - \beta_1(x)$$

Etter å ha løst opp parentesene og forkortet, sitter vi igjen med

$$v_1(x, z, y, t) = \tilde{\alpha}^{m,n+1}_{r+3}(z, y) \cdot \Big(- f_1(x) + f_2(x)\Big)$$
$$v_2(x, z, y, t) = \beta_1(x)\beta_1(y) \cdot \omega_1(z, t) - \beta_1(x)\beta_2(y) \cdot \tilde{g}^{m,n}_{r+1}(z) + \beta_2(x)\beta_{r+3}(y) \cdot \tilde{g}^{m,n}_{r+3}(z)$$
$$v_3(x, z, y, t) = \beta_1(x)\tilde{\alpha}^{m,n}_{r+1}(z) \cdot \Big(f_1(y) - f_2(y)\Big) + \beta_2(x)\tilde{\alpha}^{m,n+1}_{r+3}(z, y) \cdot f_{r+3}(y)$$
$$v_4(x, z, y, t) = \beta_1(x)\beta_1(y) \cdot \omega_2(z, t) + 1 - \beta_1(x)\beta_1(y)$$

Dette er ikke spesielt pent å se på, men dersom har lyst til å sammenligne med figur 15, kan man gjøre det enklere ved å anta at $(x, z, y) \in A^{m+1,n+1}_{r+3}$. Da vil bumpfunksjonene $\tilde{\alpha}^{m,n+1}_{r+3}(z, y) = 1$, og formelen over blir litt penere. Ved å gjøre slike antagelser, kan man få et overblikk over hva feltet gjør. Husk på at alle symbolene $\tilde{\alpha}^{m,n}_i, \beta_i$ i formelen over er bumpfunksjoner! De som bidrar til faktisk å gjøre normaliseringen er: f_i som sørger for at kantene langs $y = \pm c_1, \pm c_2, \pm c_{r+3}$ og langs $x = \pm c_1, \pm c_2$ blir normalisert, $\tilde{g}$'ene som sørger for at alle standardpartisjonene $M(h)$, $h = a', b'$, blir normalisert, og til slutt ω_1, ω_2 som sørger for at den opprinnelige partisjonen forblir normalisert.

7.3.3 Deformasjon mot σ^2

I resten av kapittelet skal vi vise hvordan vi kan definere en mer symmetrisk 'dobbel' stabilisering σ^2, slik at $\underline{\sigma} \circ \overline{\sigma} \simeq \sigma^2 \simeq \overline{\sigma} \circ \underline{\sigma}$. Dette blir gjort i definisjon 15 på slutten kapittelet. Vi vil i praksis vise at vi kan danne en serie homotopier fra $\underline{\sigma}\overline{\sigma}$ som ender opp i det som skal være definisjonen av σ^2. Disse homotopiene vil delvis være på mangfoldighetsnivå slik tilfellet var i $CAT = PL$, og delvis på vektorfeltsnivå. Vi må forsikre oss om at vektorfeltet er normalt til partisjonen overalt i homotopiene.

Gitt nå $(M, F, N, \omega) \in P(A^{m,n}, A_r^{m,n})$. La $\overline{\sigma}\underline{\sigma}(\omega)$ være vektorfeltet (v_1, v_2, v_3, v_4) slik vi regnet det ut i forrige avsnitt. Vi begynner med å gjøre (v_1, v_2, v_3, v_4) litt mer symmetrisk i sin form: Ved lineærinterpolasjon kan vi danne en homotopi fra $\beta_1(x)\tilde{\alpha}_{r+1}^{m,n}(z)$ til $\tilde{\alpha}_{r+3}^{m+1,n}(x, z)$. Bruk denne til å lage en homotopi fra (v_1, v_2, v_3, v_4) til (v_1, v_2, v_3', v_4) der v_3' er gitt ved

$$v_3'(x, z, y, t) = \tilde{\alpha}_{r+3}^{m+1,n}(x, z) \cdot \Big(f_1(y) - f_2(y)\Big) + \beta_2(x)\tilde{\alpha}_{r+3}^{m,n+1}(z, y) \cdot f_{r+3}(y)$$

Siden $supp(\beta_1(x)\tilde{\alpha}_{r+1}^{m,n}(z)) \subset supp(\tilde{\alpha}_{r+3}^{m+1,n}(x, z))$, vil vektorfeltet være normalt gjennom homotopien.

La $\nu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ være en reell, glatt funksjon som tilfredsstiller

$$\nu(t) > 0 \Leftrightarrow t > 0$$
$$\nu(t) = 0 \Leftrightarrow t \leq 0$$

La så $\rho : J^{m+n} \longrightarrow J^{m+n}$ være selvavbildningen

$$(x_1, \ldots, x_{m+n}) \mapsto (x_{m+n}, \ldots, x_1).$$

Identifisér også ρ med selvavbildningen på $A^{m,n}$ som sammensetningen

$$J^m \times X \times J^n \cong X \times (J^m \times J^n) \stackrel{id_X \times \rho}{\longrightarrow} X \times (J^m \times J^n) \cong J^m \times X \times J^n$$

Motivasjonen for å innføre denne funksjonen nå kommer fra det fremtidige ønsket om å definere en involusjon på partisjonsrommene. Det er i definisjonen av denne involusjonen (se kapittel 8) vi trenger selvavbildningen ρ. Ved å innføre ρ allerede nå forhindrer vi å måtte forandre våre definisjoner på et senere tidspunkt.

Definér nå den glatte funksjonen $H : [0, 1] \times A^{m+1,n+1} \times I \longrightarrow (0, +\infty)$ ved formelen:

$$H_\xi(x, z, y, t) :=$$
$$\beta_1(x)\beta_1(y)\Big[(1 - \xi) + \xi \cdot \big(\beta_0(x) + \beta_0(y) + \nu(\omega_2(z, t)) \cdot \nu(\omega_2(\rho(z), a + b - t))\big)\Big]$$

H_ξ er med andre ord lineærinterpolasjon mellom

$$H_0(x,z,y,t) = \beta_1(x)\beta_1(y)$$

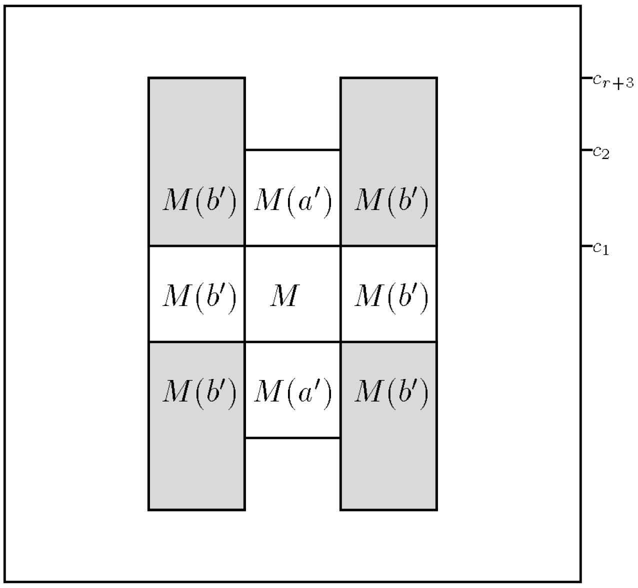
og

$$H_1(x,z,y,t) = \beta_1(x)\beta_1(y)\cdot\Big(\beta_0(x)+\beta_0(y)+\nu(\omega_2(z,t))\cdot\nu(\omega_2(\rho(z),a+b-t))\Big)$$

Dersom vi erstatter vektorfeltet (v_1, v_2, v_3', v_4) med (v_1, v_2', v_3', v_4') der v_2' og v_4' er gitt ved

$$v_2'(x,z,y,t) = H_\xi(x,z,y,t)\cdot\omega_1(z,t) - \beta_1(x)\beta_2(y)\cdot\tilde{g}^{m,n}_{r+1}(z) + \beta_2(x)\beta_{r+3}(y)\cdot\tilde{g}^{m,n}_{r+3}(z)$$
$$v_4'(x,z,y,t) = H_\xi(x,z,y,t)\cdot\omega_2(z,t) + 1 - \beta_1(x)\beta_1(y)$$

vil det nye vektorfeltet (v_1, v_2', v_3', v_4') stadig være normalt til $\overline{\sigma}\underline{\sigma}(F)$ for alle $\xi \in [0,1]$.



Figur 15: Bildet av sammensetningen $\overline{\sigma}\underline{\sigma}$

Fiksér nå feltet for $\xi = 1$. Etter disse justeringene ser feltet slik ut:

$$v_1(x,z,y,t) = \tilde{\alpha}^{m,n+1}_{r+3}(z,y)\cdot\Big(-f_1(x)+f_2(x)\Big)$$
$$v_2'(x,z,y,t) = H_1(x,z,y,t)\cdot\omega_1(z,t) - \beta_1(x)\beta_2(y)\cdot\tilde{g}^{m,n}_{r+1}(z) + \beta_2(x)\beta_{r+3}(y)\cdot\tilde{g}^{m,n}_{r+3}(z)$$
$$v_3'(x,z,y,t) = \tilde{\alpha}^{m+1,n}_{r+3}(x,z)\cdot\Big(f_1(y)-f_2(y)\Big) + \beta_2(x)\tilde{\alpha}^{m,n+1}_{r+3}(z,y)\cdot f_{r+3}(y)$$
$$v_4'(x,z,y,t) = H_1(x,z,y,t)\cdot\omega_2(z,t) + 1 - \beta_1(x)\beta_1(y)$$

Det er ikke lenger opplagt at feltet er en normalisering. Vi vil derfor stoppe opp og forklare hvorfor feltet nå er normalt til $\overline{\sigma}\underline{\sigma}(F)$.

Vi viser at feltet er normaliserende for alle $(x,z,y,t)\ inA^{m,n}\times I$ slik at $(x,y)\in int\ (J_2\times J_2)$. Det er her, og spesielt for $(x,y)\in\partial J_1\times\partial J_1$ det er kritisk at feltet er normalt.

La først $x\in int\ J_1$. Da ser $\overline{\sigma}\underline{\sigma}(M)$ ut som et produkt $(x-\epsilon,x+\epsilon)\times\underline{\sigma}(M)$ i x-retningen. Det er derfor likegyldig hva v_1-leddet er. Men nå er $H_1>0$ siden $(x,y)\in int\ (J_2\times J_2)$ og $|x|<c_1$. Vektorfeltet (v_2',v_3',v_4') er derfor essensielt likt $\underline{\sigma}\omega$ som oppfyller normalitetsbetingelsen.

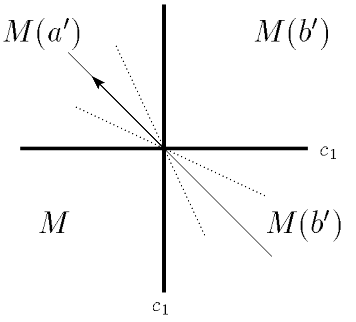
På samme måte vises tilfellet $y\in int\ J_1$, $y\in int\ J_{2-1}$ og $x\in int\ J_{2-1}$. Det er i tilfellet $(x,y)=(\pm c_1,\pm c_1)$ vi må være forsiktige.

Så anta at $x=y=c_1$. Da har vi to tilfeller: $H_1>0$ eller $H_1=0$. Anta først at $H_1>0$. Da er vi i det tilfellet vi har vært i før, for $\overline{\sigma}\underline{\sigma}M$ ser da lokalt ut som

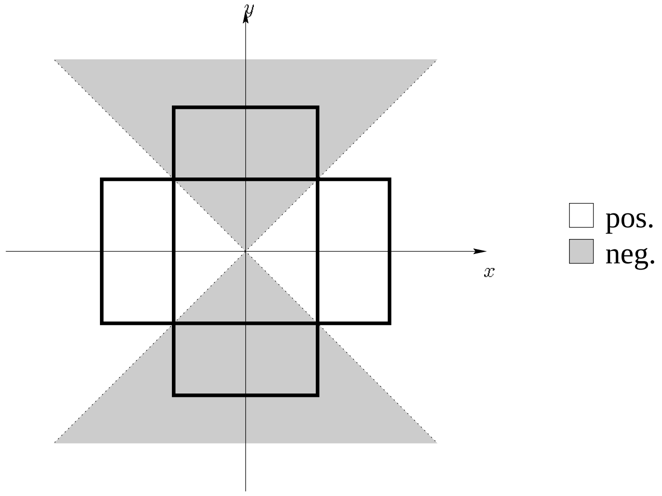
$$\overline{\sigma}\underline{\sigma}(M)=[c_1-\epsilon,c_1]\times\underline{\sigma}(M)\cup[c_1,c_1+\epsilon]\times M(b')$$

i nærheten av (c_1,z,c_1,t). På grunn av kontinuitet vil $H_1(x,z,y,t)>0$ for punkter i nærheten også. Lokalt er vi da i situasjonen fra avsnitt 4.6, og normalitet følger.

Anta så at $H_1(c_1,z,c_1,t)=0$. Da holder ikke argumentet over, men normalitet følger likevel. Vi har nemlig at $(z,t)\in A_r^{m,n}\times(a',b')$. For dersom $z\in\left(A^{m,n}\setminus A_r^{m,n}\right)$ eller $t\in\left(I\setminus(a',b')\right)$, ville $\omega_2(z,t)>0$ og $\omega_2(\rho(z),a+b-t)>0$, hvilket hadde medført at $H_1>0$. Så $(z,t)\in A_r^{m,n}\times(a',b')\subset int\ M(b',t)$. I tillegg er $v_1(c_1,z,c_1,t)=-1$, $v_3'(c_1,z,c_1,t)=1$ og $\omega_{c_1,z,c_1,t}$ peker som anvist i figuren under.



Det da lett å se at man kan finne en dobbel kjegle som inneholder linjen gjennom (c_1,z,c_1,t) og med retning $\omega_{c_1,z,c_1,t}=(-1,v_2',1,v_4')$, som oppfyller kravet i definisjon 11. I tillegg til geometrien som fremkommer fra figuren over, bruker vi at denne linjen passerer punktet (c_1,z,c_1,t) fra $int\ M(b',t)$ og ut i $int\ N(a',t)$.



Figur 16: Nullpunkter og fortegn til funksjonen $x^2 - y^2$.

Denne diskusjonen er ikke spesiell for tilfellet $\xi = 1$. Alle egenskapene vi har brukt om H_1 er også oppfyllt for H_ξ for $\xi \in [0,1]$.

Vi fortsetter nå med deformasjonen av $\overline{\sigma}\underline{\sigma}$. La $K = J_{2-1} \times A^{m,n}_{r+3} \times J_{(r+3)-1}$. (Se det skyggelagte område i figur 15.) Vi kan nå lage en deformasjon ved å 'senke' høyden til $\overline{\sigma}\underline{\sigma}(F)$ over K til den er konstant lik t som vi gjorde i PL-tilfellet. Dette gir en ikkedifferensiabel lokalt triviell familie av partisjoner av samme grunn som i PL-tilfellet, men det justerte vektorfeltet beskrevet over vil være normalt til hver partisjon i familien på grunn av f_1-komponenten i v_3'-leddet og at v_4' er positiv for $(x,y) \in (K \setminus (\pm c_1, \pm c_1))$. Her bruker vi at $\beta_1(s) < 1$ for $|s| > c_1$. For $(x,y) = (\pm c_1, \pm c_1)$ følger normalitetsegenskapen ved samme argument som vi gjennomførte over. Vi har med andre ord beskrevet et 1-simpleks i $P(A^{m+1,n+1}, A^{m+1,n+1}_{r+4})$.

Vi har spesielt kvittet oss med kanten langs linjene $y = \pm c_{r+3}$, så feltet vil fremdeles være normalt dersom vi kutter den siste summanden i v_3'-komponenten og oppnår et nytt felt (v_1, v_2', v_3'', v_4'), der:

$$v_3''(x,z,y,t) = \tilde{\alpha}^{m+1,n}_{r+3}(x,z) \cdot \Big(f_1(y) - f_2(y) \Big)$$

Siste steg i prosessen er å forandre v_2'. Ved lineærinterpolasjon kan vi lage en homotopi fra det nåværende feltet til det hvor v_2' er byttet ut med v_2'', gitt ved:

$$
\begin{aligned}
v_2''(x,z,y,t) = & H_1(x,z,y,t)\cdot\omega_1(z,t)\\
& + \beta_2(x)\beta_2(y)\big(x^2-y^2\big)\cdot\tilde{g}^{m,n}_{r+3}(z)\\
& - \beta_1(x)\beta_2(y)\cdot\tilde{g}^{m,n}_{r+1}(z)
\end{aligned}
$$

(Se figur 16.) Dette forandrer ikke normaliseringsegenskapen siden alt vi trenger nå, er at $\tilde{g}^{m,n}_{r+3}(z)$-leddet har positivt fortegn for $(x,y)\in int\ J_{2-1}\times J_1$. Lag så en ny homotopi ved å senke høyden over området $J_1\times cl\ \big(A^{m,n}_{r+3}\smallsetminus A^{m,n}_{r+1}\big)\times J_{2-1}$ fra t fra a'. Dette innfører en ny kant, men på grunn av at $\tilde{g}^{m,n}_{r+3}$ -leddet har negativt fortegn for $(x,y)\in J_1\times int\ J_{2-1}$ vil feltet normalisere.

Når dette er gjort er det ingen bruk for $\beta_1(x)\beta_2(y)\cdot\tilde{g}^{m,n}_{r+1}(z)$-leddet lenger og vi kan trygt fjerne det via en homotopi. Vi ender da opp med å bytte ut v_2'' med v_2''' der v_2''' er gitt ved:

$$
\begin{aligned}
v_2'''(x,z,y,t) = & H_1(x,z,y,t)\cdot\omega_1(z,t)\\
& + \beta_2(x)\beta_2(y)\big(x^2-y^2\big)\cdot\tilde{g}^{m,n}_{r+3}(z)
\end{aligned}
$$

Vi oppsummerer nå diskusjonen over:

Definisjon 15 *Den doble stabiliseringen σ^2 av en partisjon $(M, F, N, \omega) \in P(A^{m,n}, A_r^{m,n})$ er i det glatte tilfellet gitt på mangfoldighetsnivå ved*

$$\begin{aligned}
\sigma^2(M) = & \; J_1 \times M \times J_1 \\
& \cup J_{2-1} \times M_{(A^{m,n}, A^{m,n}_{r+3})}(b', t) \times J_1 \\
& \cup J_1 \times M_{(A^{m,n}, A^{m,n}_{r+3})}(a', t) \times J_{2-1} \\
& \cup J_{\infty-1} \times M(t) \times J_{\infty-1} \\
& \cup J_{\infty-2} \times M(t) \times J \\
& \cup J \times M(t) \times J_{\infty-2}
\end{aligned}$$

med normaliserende vektorfelt på formen

$$\begin{aligned}
v_1(x, z, y, t) &= \tilde{\alpha}^{m,n+1}_{r+3}(z, y) \cdot \Big(- f_1(x) + f_2(x) \Big) \\
v_2(x, z, y, t) &= H_1(x, z, y, t) \cdot \omega_1(z, t) + \beta_2(x)\beta_2(y)\big(x^2 - y^2\big) \cdot \tilde{g}^{m,n}_{r+3}(z) \\
v_3(x, z, y, t) &= \tilde{\alpha}^{m+1,n}_{r+3}(x, z) \cdot \Big(f_1(y) - f_2(y) \Big) \\
v_4(x, z, y, t) &= H_1(x, z, y, t) \cdot \omega_2(z, t) + 1 - \beta_1(x)\beta_1(y)
\end{aligned}$$

Diskusjonen over viser at det finnes en PL lokalt triviell 1-parameter familie av partisjoner fra $\overline{\sigma}\underline{\sigma}(M, F, N)$ til $\sigma^2(M, F, N)$ og en tilsvarende familie normaliseringer.

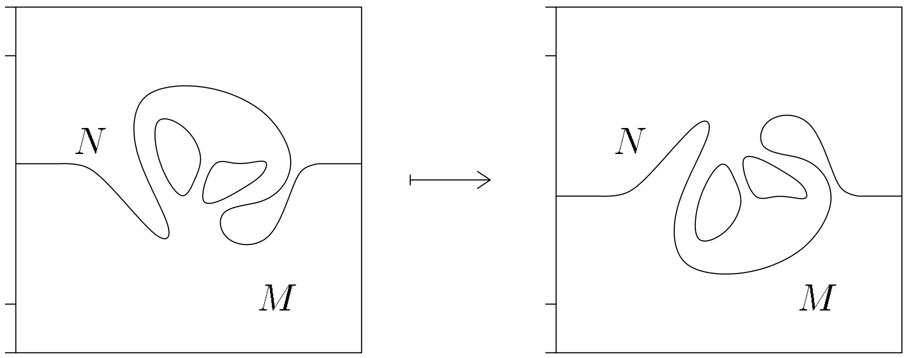
Man kan helt analogt vise at $\underline{\sigma}\overline{\sigma} \simeq \sigma^2$, og det følger som det gjorde i det stykkevis lineære tilfellet, at den sekvensielle grensen

$$\underset{m,\sigma^2}{Tel} \; P(A^{m,n}, A^{m,n}_{2(m+n)+1}) \simeq \underset{m,n}{hocolim} \; P(J^m \times X \times J^n)$$

har den riktige homotopitypen.

8 $P(X)$ tillater en involusjon!

Det viser seg at rommet av partisjoner tillater en mer eller mindre opplagt involusjon. Først av alt, la fra nå av $(a, a', b', b) = (0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1)$. Dersom $(M, F, N) \in P(X)$ er en partisjon over en kompakt mangfoldighet X, kan vi kanonisk tilordne en ny partisjon ved å 'snu partisjonen på hodet'. Mer presist, hvis $g : X \times I \longrightarrow X \times I$ er avbildningen $(x, t) \mapsto (x, 1-t)$ lar vi $\tau : P(X) \longrightarrow P(X)$ være selvavbildningen som tar en partisjon (M, F, N) til $(g(N), g(F), g(M))$. Det er klart at τ er en involusjon. I tilfellet $CAT = DIFF$ skal τ ta normalfeltet ω til en partisjon til $-dg \circ \omega \circ g^{-1} = -dg \circ \omega \circ g$. Fortegnet kommer av at vektorfeltet på $X \times I$ skal oppfylle standardbetingelsene $(i) - (ii)$ i definisjon 8 på side 23.



Problemet med denne definisjonen er at den ikke kommuterer med den doble stabiliseringen. Motivert av dette problemet defineres så en justert involusjon som følger: La ρ være selvavbildningen på J^{2m} gitt ved

$$(x_1, \ldots, x_{2m}) \mapsto (x_{2m}, \ldots, x_1)$$

Identifiser også ρ med selvavbildningen på $J^m \times X \times J^m$ ved å identifisere $J^m \times X \times J^m \cong X \times (J^m \times J^m)$. Da definerer vi selvavbildningen Θ på $J^m \times X \times J^m \times I$ som produktet $\rho \times \iota$ der $\iota(t) = 1 - t$.

Definisjon 16 *Involusjonen* $\tau : P(J^m \times X \times J^m) \to P(J^m \times X \times J^m)$ *er gitt ved at*

$$\tau(M, F, N) = (\Theta(N), \Theta(F), \Theta(M))$$

for en partisjon (M, F, N). *Dersom* ω *er en normalisering skal* $\tau(\omega) = -d\Theta \circ \omega \circ \Theta$.

Vi vil nå innføre litt notasjon. Dersom $j : P(X) \longrightarrow P(Y)$ er en avbildning og $(M, F, N) \in P(X)$, vil vi skrive $j(M, F, N)_M$ for M-delen av partisjonen $j(M, F, N)$. Likeledes skriver vi $j(M, F, N)_F$ for fronten og $j(M, F, N)_N$ for N-delen.

La $\omega = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ være et glatt vektorfelt på $J \times (J^m \times X \times J^m) \times J \times I$. Siden $\Theta = \rho \times \iota$, er $d\Theta = d\rho \times d\iota = \rho \times (-id)$.

Det følger at $-d\Theta \circ \omega \circ \Theta = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3, \tilde{w}_4)$, hvor

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_1 &= -\omega_3 \circ (\rho \times \iota)\\
\tilde{\omega}_2 &= -\rho \circ \omega_2 \circ (\rho \times \iota)\\
\tilde{\omega}_3 &= -\omega_1 \circ (\rho \times \iota)\\
\tilde{\omega}_4 &= \omega_4 \circ (\rho \times \iota)
\end{aligned}$$

Vi skal bruke dette i beviset av:

Proposisjon 1 *Avbildningen σ^2 er involutiv for CAT=PL og DIFF.*

Bevis: La oss først bevise proposisjonen på mangfoldighetsnivå, det vil si for *CAT=PL*. Det er klart at $\Theta(N(\frac{1}{4}, t)) = M(\frac{3}{4}, 1-t)$, og $\Theta(N(\frac{3}{4}, t)) = M(\frac{1}{4}, 1-t)$. Dersom $(x, z, y) \in J \times (J^m \times X \times J^m) \times J$ vil $\rho(x, z, y) = (y, \rho(z), x)$. La nå (M, F, N) være en partisjon over $J^m \times X \times J^m$ av høyde t over randen.

$$\begin{aligned}
(\tau\sigma^2(M, F, N))_M &= \Theta((\sigma^2(M, F, N))_N)\\
&= J_1 \times \Theta(N) \times J_1\\
&\quad \cup J_{2-1} \times \Theta(N(\tfrac{1}{4}, t)) \times J_1\\
&\quad \cup J_1 \times \Theta(N(\tfrac{3}{4}, t)) \times J_{2-1}\\
&\quad \cup (resten) \times \Theta(N(t)) \times (resten)\\
&= J_1 \times \Theta(N) \times J_1\\
&\quad \cup J_{2-1} \times M(\tfrac{3}{4}, 1-t) \times J_1\\
&\quad \cup J_1 \times M(\tfrac{1}{4}, 1-t) \times J_{2-1}\\
&\quad \cup (resten) \times M(1-t) \times (resten) = (\sigma^2\tau(M, F, N))_M
\end{aligned}$$

Anta så at man er i det glatte tilfellet, og at (M, F, N, ω) er en partisjon med normaliserende vektorfelt. Stabiliseringen av dette feltet er gitt ved definisjon 15 på side 53. Betegn det stabiliserte feltet med $v = (v_1, v_2, v_3, v_4) = \sigma^2\omega$. Da vil $\tau\sigma^2\omega = -d\Theta \circ v \circ \Theta = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \tilde{v}_4)$, der

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_1(x, z, y, t) &= -v_3(y, \rho(z), x, 1-t)\\
\tilde{v}_2(x, z, y, t) &= -\rho \circ v_2(y, \rho(z), x, 1-t)\\
\tilde{v}_3(x, z, y, t) &= -v_1(y, \rho(z), x, 1-t)\\
\tilde{v}_4(x, z, y, t) &= v_4(y, \rho(z), x, 1-t)
\end{aligned}$$

Vi setter nå inn for (v_1, v_2, v_3, v_4) og får:

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_1(x,z,y,t) &= -\tilde{\alpha}^{m+1,n}_{r+3}(y,\rho(z)) \cdot \Big(f_1(x) - f_2(x) \Big) \\
\tilde{v}_2(x,z,y,t) &= H_1(y,\rho(z),x,1-t) \cdot \Big[-\rho\big(\omega_1(\rho(z),1-t)\big) \Big] \\
&\qquad - \beta_2(y)\beta_2(x)\big(y^2 - x^2\big) \cdot \rho\big(\tilde{g}^{m,n}_{r+3}(\rho(z))\big) \\
\tilde{v}_3(x,z,y,t) &= -\tilde{\alpha}^{m,n+1}_{r+3}(\rho(z),x) \cdot \Big(-f_1(y) + f_2(y) \Big) \\
\tilde{v}_4(x,z,y,t) &= H_1(y,\rho(z),x,1-t) \cdot \omega_2(\rho(z),1-t) + 1 - \beta_1(y)\beta_1(x)
\end{aligned}$$

Vi husker at H_1 ble konstruert slik at $H_1(y,\rho(z),x,1-t) = H_1(x,z,y,t)$. Tilsvarende vil et tilbakeblikk på definisjonene av $\tilde{\alpha}$ og $\tilde{g}$ være nok til å innse at $\tilde{\alpha}^{m+1,n}(y,\rho(z)) = \tilde{\alpha}^{m,n+1}(z,y)$ og $\rho(\tilde{g}^{m,n}_i(\rho(z))) = \tilde{g}^{m,n}_i(z)$. Videre er $\tau(\omega) = (\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ hvor $\tilde{\omega}_1(z,t) = -\rho\big(\omega_1(\rho(z),1-t)\big)$ og $\tilde{\omega}_2(z,t) = \omega_2(\rho(z),1-t)$. Da har vi at

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_1(x,z,y,t) &= \tilde{\alpha}^{m,n+1}_{r+3}(z,y) \cdot \Big(-f_1(x) + f_2(x) \Big) \\
\tilde{v}_2(x,z,y,t) &= H_1(x,z,y,t) \cdot \tilde{\omega}_1(z,t) + \beta_2(x)\beta_2(y)\big(x^2 - y^2\big) \cdot \tilde{g}^{m,n}_{r+3}(z) \\
\tilde{v}_3(x,z,y,t) &= \tilde{\alpha}^{m+1,n}_{r+3}(x,z) \cdot \Big(f_1(y) - f_2(y) \Big) \\
\tilde{v}_4(x,z,y,t) &= H_1(x,z,y,t) \cdot \tilde{\omega}_2(z,t) + 1 - \beta_1(x)\beta_1(y)
\end{aligned}$$

Som er beskrivelsen av $\sigma^2\tau(\omega)$.

$\square$

Alt vi har gjort siden vi definerte stabilisering i kapittel 2, lar seg også gjøre i den simplisielle kategorien $hP(X)$. Vi får derfor følgende foreløpige konklusjon:

Korollar 2 *Involusjonen τ induserer en veldefinert involusjon på grensene*

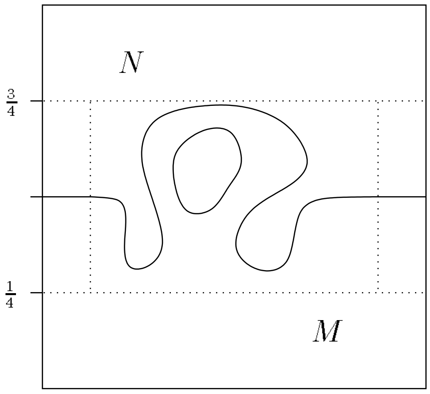
$$\underset{\sigma^2,m}{Tel}\ P(J^m \times X \times J^m) \quad og \quad \underset{\sigma^2,m}{Tel}\ hP(J^m \times X \times J^m)$$

Dessuten er det klart at τ er kompatibel med inklusjonen $P(X) \hookrightarrow hP(X)$.

9 Det involutive tuberommet

La nå $X = *$, og $CAT = DIFF$. I det som følger skal vi arbeide med partisjoner over J^k for $k \geq 0$. Vi betegner den euklidske normen på $\mathbb{R}^k$ med med $\| - \|$.

Definisjon 17 *La* $T^{m,n} = P_1^m(J^{m+n}, J^{m+n}_{2(m+n)+1})$ *være* m*-tuberommet over* J^{m+n}*. Vi skriver* T^{DIFF} *for grensen* $\underset{m,\sigma^2}{Tel}(T^{m,m})$*, det stabile tuberommet.*



Figur 17: En partisjon med én hank

$T^{m,n}$ er da rommet av enkle hanker av indeks m og koindeks n. Det er klart at $\tau : T^{m,n} \longrightarrow T^{n,m}$, og dersom vi lar $n = m$, vil τ restriktere til en involusjon på $T^{m,m}$. Siden τ kommuterer med σ^2 får vi indusert en involusjon τ på T^{DIFF}.

9.1 *BO*

La $Gr_m(\mathbb{R}^{m+n})$ betegne Grassmann-mangfoldigheten av reelle m-plan gjennom origo i $\mathbb{R}^{m+n}$. Vi kan definere en stabiliseringsavbildning $\sigma^2 : Gr_m(\mathbb{R}^{m+n}) \longrightarrow Gr_{m+1}(\mathbb{R}^{m+n+2})$ som geometrisk svarer til en standardembedding av m-plan

$$V^m \subset \mathbb{R}^{m+n} \mapsto \left(\mathbb{R}_1 \oplus V^m \oplus 0\right) \subset \mathbb{R}_1 \oplus \mathbb{R}^{m+n} \oplus \mathbb{R}_{m+n+2} \cong \mathbb{R}^{m+n+2}$$

Her er $\mathbb{R}_i = \mathbb{R}\{e_i\}$, linjen utspent av den i'te vektoren i standardbasisen til $\mathbb{R}^{m+n+2}$.

La oss fra nå av skrive G_m for $Gr_m(\mathbb{R}^{2m})$. Som modell for det klassifiserende rommet for den uendelige ortogonale gruppen kan vi ta den direkte grensen over $\{G_m\}_m$ der inklusjonene er som beskrevet over. (Se [8].) Siden vi kun er interessert i homotopiteoretiske betraktninger tar vi følgende definisjonen for BO:

Definisjon 18

$$BO := \underset{\sigma^2, m}{Tel}\ G_m$$

9.2 Involusjonen på BO

La $\rho : \mathbb{R}^{2m} \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ være avbildningen

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{2m}) \mapsto (x_{2m}, x_{2m-1}, \ldots, x_1)$$

Da kan vi definere $\tau : G_m \longrightarrow G_m$ ved $\tau(V) = \rho V^{\perp}$. Dette er med andre ord avbildningen som til et m-plan gjennom origo i $\mathbb{R}^{2m}$ først tilordner dets ortogonalkomplement, og deretter bildet under automorfien ρ. Siden ρ er en isometri er $\rho(V^{\perp}) = (\rho V)^{\perp}$, og det er trivielt å innse at τ er en involusjon. En annen viktig egenskap med τ er følgende:

Lemma 13 *Involusjonen τ kommuterer med stabiliseringsavbildningene som definerer BO.*

Vi får dermed en veldefinert involusjon på grensen BO, som vi også betegner med τ.
Bevis: ved utregning:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 \tau V =& \mathbb{R}_1 \oplus (\rho V^{\perp}) \oplus 0 \\
=& \rho \left(0 \oplus V^{\perp} \oplus \mathbb{R}_{2m+2} \right) \\
=& \rho \left((\mathbb{R}_1 \oplus V \oplus 0)^{\perp} \right) = \tau \sigma^2 V
\end{aligned}$$

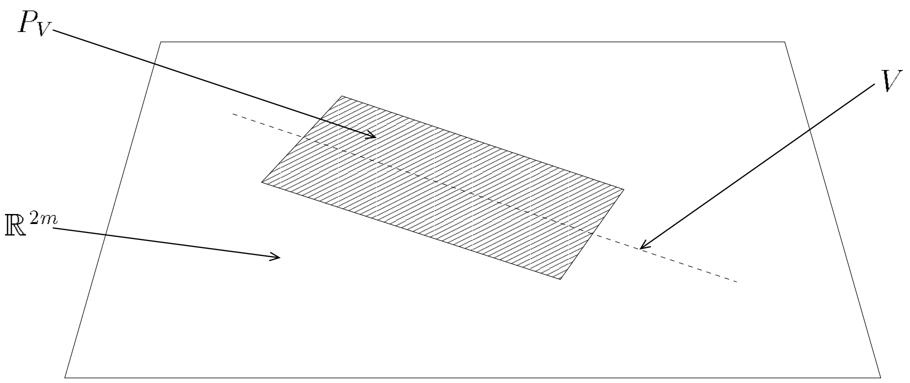
□

9.3 Tubeavbildningen $rt : BO \longrightarrow T^{DIFF}$

I det som følger skal vi konstruere en avbildning $rt : G_m \longrightarrow T^{m,m}$ for alle $m \geq 1$. Vi kommer til å kalle denne avbildningen for 'tubeavbildningen', mens bokstavene 'rt' står for 'rigid tube' slik avbildningen er navngitt i [10]. Vi vil i dette avsnittet nøye oss med å gjøre mangfoldighetskonstruksjonene, og spare spørsmålet om normaliserende vektorfelt til avsnitt 9.6.

La c_1 og c_2 være slik de ble definert i avsnitt 7, og la V være et m-plan gjennom origo i $\mathbb{R}^{2m}$. Da kan vi definere

$$P_V := \left\{ (x, y) \in V \oplus V^{\perp} \middle| \|x\| \leq c_2, \|y\| \leq c_1 \right\} = D^m_V(c_2) \times D^m_{V^{\perp}}(c_1)$$



Figur 18: Mengden P_V

P_V er med andre ord en fortykning av m-disken i V av radius c_2. Se figur 18. Vi kan nå definere tubeavbildningen. La

$$\begin{aligned} rt(V)_M = \ & \mathbb{R}^{2m} \times [0, \tfrac{1}{4}] \\ & \cup \left(\mathbb{R}^{2m} \smallsetminus int\ P_{V^\perp}\right) \times [\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}] \\ & \cup P_V \times [\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}] \end{aligned}$$

være en kodimensjon-0 undermangfoldighet av $\mathbb{R}^{2m} \times I$. Vi husker at vi valgte c_i i kapittel 7 slik at $0 = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots$. Dersom vi har valgt c_2 liten nok, kan vi anta at $rt(V)_M$ er standard av høyde $\frac{1}{2}$ utenfor J^{2m}_{4m+1}.

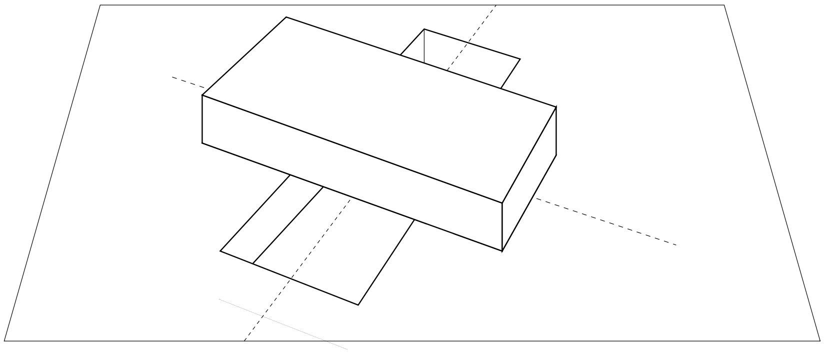
Definisjon 19 *For $V \in G_m$, la $rt(V) \in T^{m,m}$ være partisjonen over J^{2m} bestemt av $rt(V)_M \cap (J^{2m} \times I)$.*

Lemma 14 *rt er involutiv, dvs.*

$$rt \circ \tau = \tau \circ rt$$

Bevis: La $V \in G_m$. Da er $(rt \circ \tau)(V)$ lik partisjonen $(M, F, N) \in T^{m,m}$, der M er gitt ved

$$\begin{aligned} M = \ & J^{2m} \times [0, \tfrac{1}{4}] \\ & \cup \left(J^{2m} \smallsetminus int\ P_{\tau V^\perp}\right) \times [\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}] \\ & \cup P_{\tau V} \times [\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}] \\ = \ & J^{2m} \times [0, \tfrac{1}{4}] \\ & \cup \left(J^{2m} \smallsetminus int\ P_{\rho V}\right) \times [\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}] \\ & \cup P_{\rho V^\perp} \times [\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}] \end{aligned}$$



Figur 19: Bildet av V

For å regne ut $\tau \circ rt$, merker vi først at partisjonen $(M', F', N') = rt(V)$ er gitt ved at

$$\begin{aligned} N' = \quad & J^{2m} \times [\tfrac{3}{4}, 1] \\ & \cup \left(J^{2m} \setminus int\ P_V\right) \times [\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}] \\ & \cup P_{V\perp} \times [\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}] \end{aligned}$$

For å finne ut hvordan $\tau(rt(V))$ ser ut, trenger vi å regne ut $\Theta N'$, der $\Theta = \rho \times \iota : J^{2m} \times I \longrightarrow J^{2m} \times I$ er homeomorfien fra avsnitt 8. Det er lett å se at $\rho(P_V) = P_{\rho V}$. Vi vet at $\tau(M', F', N') = (\Theta N', \Theta F', \Theta M')$, og utregningen

$$\begin{aligned} \Theta N' &= \Theta\left(J^{2m} \times [\tfrac{3}{4}, 1] \quad \cup \quad \left(J^{2m} \setminus int\ P_V\right) \times [\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}] \quad \cup \quad P_{V\perp} \times [\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}]\right) \\ &= J^{2m} \times [0, \tfrac{1}{4}] \quad \cup \quad (J^{2m} \setminus int\ P_{\rho V}) \times [\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}] \quad \cup \quad P_{\rho V\perp} \times [\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}] \end{aligned}$$

viser at $(\tau(rtV))_M = \Theta(N') = (rt(\tau V))_M$

□

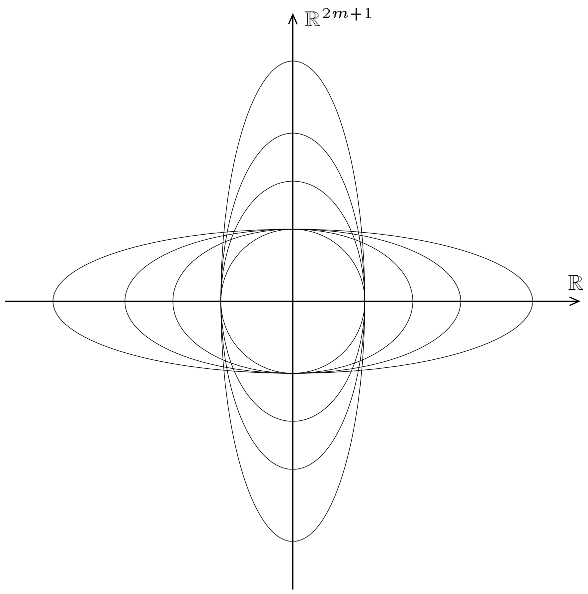
9.4 Ellipsenormen

Vi stanser her et øyeblikk for å drøfte andre normer enn den euklidske. Dette viser seg å være nyttig for de siste avsnittene, hvor vi er nødt til å interpolere mellom en slags sylindernorm og den euklidske normen for å vise kompabilitet mellom tubeavbildningen og den doble stabiliseringen.

La $(x, z, y) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{2m} \oplus \mathbb{R}$. Vi kan definere en familie normer, én for hver $s \in [0, 1]$.

Definisjon 20 *Ellipsenormen* $\|-\|_s$ *på* $\mathbb{R}^{2m+2}$ *er gitt ved formelen*

$$\|x, z, y\|_s = max\left(\sqrt{x^2 + s \cdot \|z, y\|^2}, \sqrt{\|z\|^2 + s \cdot \|x, y\|^2}, \sqrt{y^2 + s \cdot \|x, z\|^2}\right)$$



Figur 20: Lange ellipser begrenser noe som ligner en sylinder

For $0 < s \leq 1$ ser vi at $\|{-}\|_s$ er maksimum av tre normer. Disse normene er glatte vekk fra origo, og en sfære i hver av disse normene er en ellipsoide i $\mathbb{R}^{2m+2}$. Når $s = 0$, er vi i det degenererte tilfellet hvor ellipsoidenes store halvakser er uendelige, men $\|{-}\|_s$ er nå en slags supremumsnorm.

Dersom E_s^1, E_s^2 og E_s^3 betegner diskene begrenset av de tre normene, vil en sfære i $\|{-}\|_s$-normen være alle punkter $p \in \partial(E_s^1 \cap E_s^2 \cap E_s^3)$. Figur 20 forestiller et snitt med $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{2m} \oplus 0$. (Når $y = 0$, blir normen enklere siden den siste kvadratroten i definisjonen kan fjernes på grunn av ulikheten $s \cdot \|x, z\|^2 = s \cdot (x^2 + \|z\|^2) \leq s \cdot x^2 + \|z\|^2$.)

For $s = 1$, er $\|{-}\|_s$ den vanlige euklidske normen på $\mathbb{R}^{2m+2}$. For $s = 0$ er vi en ganske annen situasjon. Enhetssfæren i denne normen er ikke en euklidsk sfære, men en dobbelt sylinderflate $\partial(D^1 \times D^{2m} \times D^1)$. Vi bruker nå denne observasjonen til en nyttig definisjon.

Definisjon 21 *La Φ_s være den (topologiske) automorfien på $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{2m} \oplus \mathbb{R}$ gitt ved*

$$\Phi_s(x, z, y) = \frac{\|x, z, y\|_0}{\|x, z, y\|_s} \cdot (x, z, y)$$

for alle $(x, z, y) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{2m} \oplus \mathbb{R} \setminus 0$. Ved kontinuitet defineres $\Phi_s(0) = 0$.

Vi merker oss at Φ_s bevarer alle lineære underrom av $\mathbb{R}^{2m+2}$ siden alt som gjøres er skalering. Det som imidlertid er viktig, er at Φ_s er en familie automorfier med egenskapen at Φ_0 er identiteten på $\mathbb{R}^{2m+2}$, og Φ_1 tar sylinderflater, dvs. sfærer i $\|-\|_0$-normen, til euklidske sfærer.

9.5 Stabilisering av tuber

Det viser seg at tubeavbildningen ikke kommuterer helt med stabiliseringen σ^2. Problemet er delvis at disker ikke stabiliserer til nye disker, men sylindre.

Vi vil i beviset av den neste proposisjonen få bruk for betraktningene gjort i forrige avsnitt. Først vil vi imidlertid gjøre en observasjon angående tubeavbildningen.

Anta at vi ser på tilfellet $rt : G_{m+1} \longrightarrow T^{m+1,m+1}$. La $V \in G_m$, og se på $rt(\sigma^2 V) = rt(\mathbb{R} \oplus V)$. Partisjonen over J^{2m+2} ble beskrevet ved hjelp av undermangfoldigheten $P_{\mathbb{R}\oplus V} \subset J^{2m+2}$, og som vi husker, var $P_{\mathbb{R}\oplus V}$ mengden

$$D^{m+1}_{\mathbb{R}\oplus V}(c_2) \times D^{m+1}_{(\mathbb{R}\oplus V)^\perp}(c_1) \tag{5}$$

som er en fortykket $(m+1)$-disk i $\mathbb{R} \oplus V$. Disse konstruksjonene brukte den euklidske normen. Motivert av fremtidige anvendelser, definerer vi nå en versjon av konstruksjonen over som bruker normene fra forrige avsnitt.

Definisjon 22 *La $P^s_{\mathbb{R}\oplus V}$ være mengden (5), der den euklidske normen er byttet ut med $\|-\|_s$.*

Merk spesielt at

$$P^0_{\mathbb{R}\oplus V} = D^1(c_2) \times D^m_V(c_2) \times D^m_{V^\perp}(c_1) \times D^1(c_1) = D^1(c_2) \times P_V \times D^1(c_1).$$

Vi er klare for

Proposisjon 2 *Det finnes en homotopi $\{F_t\}_{0\leq t\leq 1} : G_m \longrightarrow T^{m+1,m+1}$ slik at*

(i) $F_0 = \sigma^2 \circ rt$

(ii) $F_1 = rt \circ \sigma^2$

(iii) $\tau \circ F_t = F_t \circ \tau$ *for alle* $0 \leq t \leq 1$.

Med andre ord er kvadratet

$$\begin{array}{ccc} G_m & \xrightarrow{\sigma^2} & G_{m+1} \\ \downarrow{\scriptstyle rt} & \boxed{\simeq} & \downarrow{\scriptstyle rt} \\ T^{m,m} & \xrightarrow{\sigma^2} & T^{m+1,m+1} \end{array}$$

kommutativt opp til en involutiv homotopi.

Bevis: Gitt $V \in G_m$ og la

$$\begin{aligned} Q(V)_M := &\mathbb{R}^{2m+2} \times [0, \tfrac{1}{4}] \\ &\cup(\mathbb{R}^{2m+2} \setminus int\ (P^0_{(\mathbb{R}\oplus V)^\perp})) \times [\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}] \\ &\cup P^0_{\mathbb{R}\oplus V} \times [\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}] \end{aligned}$$

Vi lar $Q(V)_M$ definere M-delen i en partisjon over J^{2m+2}, og ønsker først å lage en 1-parameterfamilie fra $\sigma^2(rt(V))_M$ til $Q(V)_M$. (Nå passer det å ta en titt på definisjonen av σ^2 i definisjon 15 på side 53.) La derfor

$$\begin{aligned} K_1 &:= J_{2-1} \times (J^{2m}_{4m+3} \setminus P_V) \times J_1 \\ K_2 &:= J_1 \times ([J^{2m}_{4m+3} \setminus P_{V^\perp}) \times J_{2-1} \end{aligned}$$

Ved å senke høyden over K_1 fra $\frac{3}{4}$ til $\frac{1}{2}$ samtidig som man hever høyden over K_2 fra $\frac{1}{4}$ til $\frac{1}{2}$ lager vi en lokalt triviell familie partisjoner. Når høyden over K_1 og K_2 er $\frac{1}{2}$ har vi $Q(V)_M$. Dersom vi passer på at høyden over K_1 til en hver tid i familien er lik $1-t$, der t er høyden over K_2, er det lett å se at familien er kompatibel med involusjonen.

Siste steg i homotopien skal bringe $Q(V)_M$ til $rt(\sigma^2(V))_M$. Dette skal gjøres ved å definere en ambient isotopi av hele $\mathbb{R}^{2m+2} \times I$.

La Φ_s være familien automorfier på $\mathbb{R}^{2m+2}$ fra avsnitt 9.4. Vi bruker denne til å definere en ny familie $\{\Xi^V_s\}_s$ automorfier på $\mathbb{R}^{2m+2}$ ved formelen:

$$\Xi^V_s := \Phi_s\big|_{\mathbb{R}_1\oplus V} \oplus \Phi_s\big|_{V^\perp\oplus\mathbb{R}_{2m+2}}$$

Φ_s bevarer alle lineære underrom, så definisjonen er veldefinert. Vi utvider Ξ^V_s til hele $\mathbb{R}^{2m+2} \times I$ ved å ta produktet med identiteten på I. Da kan vi danne homotopien

$$F'_s : G_m \longrightarrow T^{m+1,m+1}$$

ved formelen $F'_s(V)_M = (\Xi^V_s \times id)(Q(V)_M)$. Påstanden er da at dette gir en homotopi slik at $F'_0(V) = Q(V)_M$ og $F'_1(V) = rt(\sigma^2(V))_M$. Det første er enkelt siden vi hadde at $\Phi_0 = id$. Vi skal sjekke hva som skjer for $s = 1$. Men som vi så, tar Ξ^V_1

$$P^0_{\mathbb{R}\oplus V} = \Big(D^1(c_2) \times D^m_V(c_2)\Big) \times \Big(D^m_V(c_1) \times D^1(c_1)\Big)$$

homeomorft på

$$D^{m+1}_{\mathbb{R}\oplus V}(c_2) \times D^m_{(\mathbb{R}\oplus V)^\perp}(c_1) = P_{\mathbb{R}\oplus V}$$

Likeledes sendes mangfoldigheten $P^0_{(\mathbb{R}\oplus V)^\perp}$ homeomorft på $P_{(\mathbb{R}\oplus V)^\perp}$. Dette viser påstanden. Dersom vi ser på Q som en avbildning $Q : G_m \longrightarrow T^{m+1,m+1}$, har vi vist at $Q \simeq rt \circ \sigma^2$. Tilsammen har vi da at $\sigma^2 \circ rt \simeq Q \simeq rt \circ \sigma^2$.

Hvorfor er så denne homotopien kompatibel med involusjonen? La L være en lineær isometri av $\mathbb{R}^{2m+2}$ som bytter den første og siste $\mathbb{R}$-komponenten i $\mathbb{R}^{2m+2} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{2m} \oplus \mathbb{R}$. Matrisen til L ser med andre ord ut som

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & M & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

for en eller annen $M \in O(2m)$. For $(x, z, y) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{2m} \oplus \mathbb{R}$ vil da $L(x, z, y) = (y, M \cdot z, x)$, og det er lett å sjekke at L er en isometri med hensyn på alle normene $\|-\|_s$. Av dette følger det at $L \circ \Phi_s = \Phi_s \circ L$. Da har vi at

$$L \circ \Xi_s^V = \Xi_s^{L(V)^\perp} \circ L$$

siden

$$\begin{aligned} L \circ \Xi_s^V &= L \circ \Phi_s\big|_{\mathbb{R}_1 \oplus V} \oplus L \circ \Phi_s\big|_{V^\perp \oplus \mathbb{R}_{2m+2}} \\ &= \Phi_s \circ L\big|_{\mathbb{R}_1 \oplus V} \oplus \Phi_s \circ L\big|_{V^\perp \oplus \mathbb{R}_{2m+2}} \\ &= \Big(\Phi_s\big|_{L(\mathbb{R}_1 \oplus V)} \oplus \Phi_s\big|_{L(V^\perp \oplus \mathbb{R}_{2m+2})}\Big) \circ L \\ &= \Big(\Phi_s\big|_{L(V) \oplus \mathbb{R}_{2m+2}} \oplus \Phi_s\big|_{\mathbb{R}_1 \oplus L(V)^\perp}\Big) \circ L \\ &= \Xi_s^{L(V)^\perp} \circ L \end{aligned}$$

Vi merker at ρ er en isometri som beskrevet over. Dette betyr at $\Theta \circ (\Xi_s^V \times id) = (\rho \times \iota) \circ (\Xi_s^V \times id) = (\Xi_s^{\rho V^\perp} \times id) \circ (\rho \times \iota) = (\Xi^{\tau V} \times id) \circ \Theta$. Da har vi at

$$\begin{aligned} \tau(F_s'(V))_M =& \Theta \circ (\Xi_s^V \times id)\ \big(Q(V)_N\big) \\ =& (\Xi_s^{\tau V} \times id) \circ \Theta\ \big(Q(V)_N\big) \\ =& (\Xi_s^{\tau V} \times id)\ \big(Q(\tau V)_M\big) \\ =& F_s'(\tau V)_M \end{aligned}$$

som betyr at homotopien er kompatibel med τ. Her bruker vi at $\Theta(Q(V)_N) = Q(\tau V)_M$. Dette følger ved nøyaktig samme regning som den i beviset for lemma 14.

$\square$

9.5.1 En tube for hver norm

I beviset over brukte vi to deformasjoner for å danne homotopien mellom $\sigma^2 \circ rt$ og $rt \circ \sigma^2$. Det er den andre homotopien som er interessant. I beviset ble denne deformasjonen beskrevet ved å angi en partisjon $Q(V)$, og vise at ved å anvende familien $\Phi_s \times id_I$ av automorfier på $\mathbb{R}^{2m+2} \times I$, interpolerer vi mellom $Q(V)$ og $rt(\sigma^2 V)$. Ved å bruke en slik familie automorfier er det åpenbart at vi produserer en lokalt triviell 1-parameter familie av partisjoner.

En annen måte å beskrive denne interpolasjonen er som følger. La $Q^s(V)$ være partisjonen over J^{2m+2}, gitt ved at

$$\begin{aligned} Q^s(V)_M = \quad & \mathbb{R}^{2m+2} \times [0, \tfrac{1}{4}] \\ & \cup \left(\mathbb{R}^{2m+2} \smallsetminus int\ P^s_{(\sigma^2 V)^\perp}\right) \times [\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}] \\ & \cup P^s_{\sigma^2 V} \times [\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}] \end{aligned}$$

Dette er samme formel som den som definerer $rt(\sigma^2 V)$. Men i stedet for den euklidske normen på $\mathbb{R}^{2m+2}$ bruker vi $\|{-}\|_s$.

Da er $Q^0(V) = Q(V)$, $Q^1(V) = rt(\sigma^2 V)$ og partisjonsfamilien gitt ved $s \mapsto Q^s(V)$ er den samme som $s \mapsto F'_s(V)$, fra beviset over.

9.6 Den glatte tube

Vi vil beskrive hvordan de foregående konstruksjoner kan gis et normaliserende vektorfelt, og således gi mening i den glatte kategorien.

Vi vil først vise hvordan vi kan konstruere en normalisering til $rt(V)$ for alle $V \in G_m$.

Vi antar nå at c_1 er valgt så liten at c_1 og c_2 oppfyller ulikheten $2 \cdot c_1 < c_2$. Dette er den andre gangen vi gjør antagelser om c_1 og c_2, men begge antagelsene er kompatible og gir ingen forskjeller i noe vi har gjort så langt.

Da kan vi velge en glatt funksjon $b : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ slik at

$$b(t) = -1 \qquad \text{for alle } c_1 \leq t \leq \sqrt{2}c_1 \tag{6}$$

$$b(t) = 1 \qquad \text{for alle } c_2 \leq t \leq \sqrt{2}c_2 \tag{7}$$

$$b(t) = 0 \qquad \text{for alle } t \text{ i en liten omegn om } 0 \tag{8}$$

La η være det glatte vektorfeltet på $\mathbb{R}^{2m}$ gitt ved $\eta(x) = b(\|x\|) \cdot x$. For $V \in G_m$ definerer vi vektorfeltet ξ^V på $V \oplus V^\perp$ ved

$$\xi^V = \eta \circ proj_V - \eta \circ proj_{V^\perp}$$

Velg så en glatt funksjon $q : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ som oppfyller

$$q(t) = \begin{cases} 1 & t = \frac{1}{2} \\ 0 & t \in [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

og identiteten $q(\iota(t)) = q(1-t) = q(t)$. Her er ι som vanlig automorfien på I gitt ved $\iota(t) = 1 - t$. Definér da $f^V : V \longrightarrow \mathbb{R}$ ved

$$f^V(u) := \|u\|^2 - c_1^2$$

og til slutt $h : V \oplus V^\perp \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ ved formelen

$$h(u, v, t) := (1 - q(t)) + q(t) \cdot \left(f^V(u) + f^{V^\perp}(v)\right)$$

Merk at et annet valg $V' \oplus V'^\perp$ ikke forandrer h ansett som funksjon fra $\mathbb{R}^{2m}$.

9.6.1 Normalisering av $rt(V)$

La $V \in G_m$. Påstanden er at $\omega := (\xi^V, h)$ er en normalisering av partisjonen $rt(V)$. Først merker vi oss at vektorfeltet ξ^V på $\mathbb{R}^{2m}$ normaliserer undermangfoldigheten ∂P_V. (Se beviset for lemma 15 for et mer generelt bevis.) Merk at flytlinjene strømmer ut fra det indre av P_V. Likeledes normaliseres $\partial P_{V^\perp}$, men her strømmer flytlinjene inn i det indre av $P_{V^\perp}$.

Anta nå at $t \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. Her ser $rt(V)_M$ ut som et produkt $P_V \times (t - \epsilon, t + \epsilon)$, og siden ξ^V normaliserer ∂P_V, er vi fremme. Dersom $t = \frac{3}{4}$, ser $rt(V)_M$ lokalt ut som $P_V \times (\frac{3}{4} - \epsilon, \frac{3}{4}]$. Dersom $\epsilon > 0$ er liten nok, vil $h(u, v, t) > 0$ for alle $t \in (\frac{3}{4} - \epsilon, \frac{3}{4}]$, som medfører at vektorfeltet oppfyller (ξ^V, h) hypotesen i lemma 8 på side 28.

Tilsvarende vises normalitet for $t < \frac{1}{2}$. Her bruker vi at flytlinjene til vektorfeltet ξ^V strømmer inn i $P_{V^\perp}$.

Det gjenstår å se hva som skjer når $t = \frac{1}{2}$. Så la

$$\begin{aligned} (u, v, \tfrac{1}{2}) \in \; & rt(V)_F \cap \mathbb{R}^{2m} \times \{\tfrac{1}{2}\} \\ &= \left(\mathbb{R}^{2m} \smallsetminus int\ (P_V \cup P_{V^\perp})\right) \cup D_V^m(c_1) \times D_{V^\perp}^m(c_1) \\ &= \left(\mathbb{R}^{2m} \smallsetminus int\ (P_V \cup P_{V^\perp})\right) \cup \left(P_V \cap P_{V^\perp}\right) \\ &=: A \cup B \end{aligned}$$

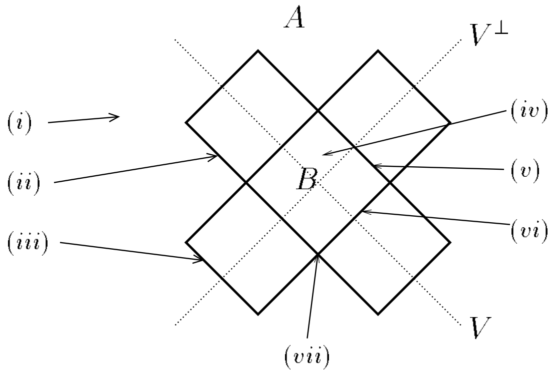
Funksjonen h ser ut som $h(u, v, \frac{1}{2}) = f^V(u) + f^{V^\perp}(v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2c_1^2$. Anta først at $\|u\|^2 + \|v\|^2 > 2c_1^2$ slik at $h(u, v, \frac{1}{2}) > 0$. Da er vi i ett av tre tilfeller:

(i) $rt(V)_M$ ser lokalt ut som et produkt $U \times (\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2}]$, der $U \subset \mathbb{R}^{2m}$ er en omegn om (u, v)

(ii) $rt(V)_N$ ser lokalt ut som et produkt $U \times [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon)$, der $U \subset A$ er en omegn om (u, v)

(iii) $rt(V)_M$ ser lokalt ut som $U \times (\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2}]$, der $U \subset A$ er en omegn om (u, v)

Se figur 21. I tilfelle (i) holder det at ω har positiv I-komponent. Siden ξ^V normaliserer P_V, og h er strengt positiv er vi fremme i tilfelle (ii) ved lemma 8, side 28. Vi bruker her at flytlinjene strømmer inn i $rt(V)_N$. Tilsvarende vises tilfellet (iii).



Figur 21: Forskjellige tilfeller for $t = \frac{1}{2}$

Anta så at $\|u\|^2 + \|v\|^2 < 2c_1^2$, slik at $h(u, v, \frac{1}{2}) < 0$. Vi er da i ett av tilfellene

(iv) $rt(V)_M$ ser lokalt ut som et produkt $U \times [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon)$, der $U \subset int\ B$ er en omegn om (u, v)

(v) $rt(V)_M$ ser lokalt ut som $U \times [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon)$, der $U \subset int\ D_V^m(c_1) \oplus D_{V^\perp}^m(c_1)$ er en omegn om (u, v)

(vi) $rt(V)_N$ ser lokalt ut som $U \times (\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2}]$, der $U \subset D_V^m(c_1) \oplus int\ D_{V^\perp}^m(c_1)$ er en omegn om (u, v)

Normalitet følger ved samme argumentasjon som over.

Det gjenstår å sjekke normalitetsbetingelsen for alle punkter

(vii) $(u, v) \in A \cap B \Leftrightarrow \|u\|^2 + \|v\|^2 = 2c_1^2$

Da er $(\xi^V, h)(u, v, \frac{1}{2}) = (-u, v, 0)$. Så linjen gjennom (u, v, t) gitt på formen $s \mapsto (u, v, \frac{1}{2}) + s \cdot (-u, v, 0) = ((1-s) \cdot u, (1+s) \cdot v, \frac{1}{2})$ skjærer $rt(V)_F$ nøyaktig

for $s = 0$ og er inneholdt i $int\ rt(V)_N$ hvis og bare hvis $s > 0$. For å slå fast at dette gjelder ikke bare for linjen, men også for flytlinjen gjennom punktet holder det ved lemma 9 på side 30 å finne en dobbel kjegle om linjen, som oppfyller krav (ii) i definisjon 11, 28. Men det er lett å se at om vi pertuberer vektoren $(-u, v, 0)$ litt i $\mathbb{R}^{2m+1}$ vil den tilsvarende linjen gjennom $(u, v, \frac{1}{2})$ fremdeles snitte $rt(V)_F$ som beskrevet over. Unionen av alle disse pertuberte linjene danner en dobbel kjegle om den upertuberte linjen, og vi er fremme.
Bemerkning: Dersom $g^V : V \longrightarrow \mathbb{R}$ er en annen glatt funksjon som oppfyller egenskapene

$$g^V(u) = \begin{cases} < 0 & \text{for } \|u\|^2 < c_1^2 \\ > 0 & \text{for } \|u\|^2 > c_1^2 \end{cases} \tag{9}$$

så vil (ξ^V, h) være normaliserende om vi byttet ut f^V med g^V i definisjonen av h på side 66.

Egenskapene vi bruker for å vise normalitet over er at ξ^V normaliserer ∂P_V og $\partial P_{V^\perp}$, samt at f^V oppfyller (9).

9.6.2 Kompabilitet med involusjonen

Normaliseringen ω er i tillegg kompatibel med involusjonen. Tubeavbildningen tar et plan V til den normaliserte partisjonen $(rt(V), \omega)$, der $\omega = (\xi^V, h)$. Da er $rt(\tau V)_\omega = (\xi^{\tau V}, h) = (\xi^{\rho V^\perp}, h)$, og $\xi^{\rho V^\perp} = \eta \circ proj_{\rho V^\perp} - \eta \circ proj_{\rho V}$. (jf. definisjonen, side 65.)

På den annen side er

$$\begin{aligned} \tau(rt(V)_\omega) &= -d\Theta \circ rt(V)_\omega \circ \Theta \\ &= (-\rho \times id)(\xi^V, h)(\rho \times \iota) \\ &= (-\rho\xi^V(\rho \times \iota), h(\rho \times \iota)) \end{aligned}$$

Nå husker vi at $h(u, v, t) = (1 - q(t)) + q \cdot (\|u, v\|^2 - 2c_1^2)$. Siden $q(\iota(t)) = q(1 - t) = q(t)$ og ρ er en isometri, vil $h \circ (\rho \times \iota) = h$. I tillegg er

$$\begin{aligned} & - \rho\xi^V\rho \\ = & - \rho(\eta \circ proj_V - \eta \circ proj_{V^\perp})\rho \\ = & - \rho \circ \eta \circ \rho \circ proj_{\rho V} + \rho \circ \eta \circ \rho \circ proj_{\rho V^\perp} \end{aligned}$$

Her bruker vi at $\rho \circ proj_{\rho V} = proj_V \circ \rho$.

Men η som funksjon på $\mathbb{R}^{2m}$ er invariant under ortogonalt basisskifte, det vil si $M\eta M^{-1} = \eta$ for alle $M \in O(2m)$. Derfor er $\rho\eta\rho = \rho\eta\rho^{-1} = \eta$, og vi er fremme.

9.6.3 Addendum til proposisjon 2

Den involutive homotopien i proposisjon 2 gir ikke mening i den glatte kategorien uten en normalisering. Vi må produsere en familie vektorfelt som normaliserer alle partisjonene gjennom homotopien. Planen er grovt sett å lage et vektorfelt $\omega_s := (\xi^{\sigma^2 V}, h_s)$ der $\xi^{\sigma^2 V}$ er vektorfeltet på $\mathbb{R}^{2m+2}$ definert i forrige avsnitt, og $\{h_s\}_s$ er en glatt familie glatte funksjoner $h_s : \mathbb{R}^{2m+2} \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ som oppfyller egenskapen (9) i bemerkningen til avsnitt 9.6.1. Ved å gjenta argumentet i avsnitt 9.6.1 viser vi at denne familien vektorfelt normaliserer partisjonsfamilien i homotopien.

Først er vi nødt til å foreta noen valg. La $\alpha, \beta : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ være to glatte funksjoner som oppfyller

$$\alpha(s) = \begin{cases} > 0 & |s| < c_1^2 \\ 0 & |s| \geq c_1^2 \end{cases}$$

$$\beta(s) = \begin{cases} 1 & |s| \leq c_1^2 \\ < 1 & c_1^2 < |s| < c_2^2 \\ 0 & |s| \geq c_2^2 \end{cases}$$

For $s \in [0,1]$, la $f_s^{\sigma^2 V} : \sigma^2 V \longrightarrow \mathbb{R}$ være den glatte funksjonen gitt ved formelen

$$\begin{aligned} f_s^{\sigma^2 V}(x,u) = & -\alpha(x^2 + s \cdot \|u\|^2) \cdot \alpha(s \cdot x^2 + \|u\|^2) \\ & + \Big(1 - \beta(x^2 + s \cdot \|u\|^2) \cdot \beta(s \cdot x^2 + \|u\|^2)\Big) \end{aligned}$$

for alle $(x,u) \in \mathbb{R} \oplus V = \sigma^2 V$. For $s \in [0,1]$ kan vi da definere den glatte funksjonen $h_s : \sigma^2 V \oplus (\sigma^2 V)^\perp \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ ved

$$h_s(x,u,v,y,t) = (1 - q(t)) + q(t) \cdot \big(f_s^{\sigma^2 V}(x,u) + f_s^{(\sigma^2 V)^\perp}(v,y)\big)$$

(Sammenlign med definisjonen av h i begynnelsen av avsnitt 9.6.)

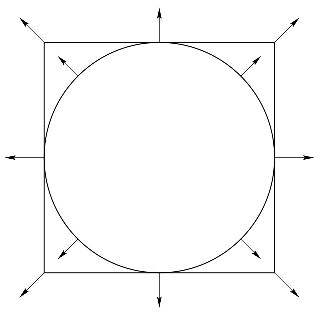
Tilordningen $s \mapsto (\xi^{\sigma^2 V}, h_s)$ bestemmer en glatt familie glatte vektorfelt på $\mathbb{R}^{2m+2} \times I$. Da har vi følgende resultat:

Lemma 15 *Familien av partisjoner gitt ved $s \mapsto Q^s(V)$ fra proposisjon 2, normaliseres av familien $s \mapsto (\xi^{\sigma^2 V}, h_s)$.*

I tillegg er vektorfeltene kompatible med involusjonen for alle $s \in [0,1]$.

Bevis: Gitt $s \in [0,1]$. Ved observasjonen gjort i avsnitt 9.5.1, tenker vi på alle partisjonene $Q^s(V)$ som essensielt den samme. Forskjellen er med hvilken norm $\|-\|_s$ de er konstruert. For å innse at $Q^s(V)$ normaliseres av vektorfeltet

$(\xi^{\sigma^2 V}, h_s)$ merker vi først at $\xi^{\sigma^2 V}$ normaliserer $P^s_{\sigma^2 V}$ for alle $s \in [0,1]$. Vi husker at $P^s_{\sigma^2 V} = D^{m+1}_{\sigma^2 V}(c_2) \times D^{m+1}_{(\sigma^2 V)^\perp}(c_1)$. (Husk at vi bruker ellipsenormen $\|-\|_s$.) Siden vi valgte bumpfunksjonen b med egenskapen (7), vil feltet $\eta\big|_{\sigma^2 V}$ normalisere $\partial D^{m+1}_{\sigma^2 V}(c_2)$ ansett som en disk i alle normene: For la $(x,u) \in \partial D^{m+1}_{\sigma^2 V}(c_2)$. Da er $\|x,u\|^2_s = max(s \cdot x^2 + \|u\|^2, x^2 + s \cdot \|u\|^2) = c_2^2$. (Husk at $y = 0$, og det tredje uttrykket kan sløyfes som i 9.4.) Dette medfører at $c_2^2 \leq \|x,u\|^2 \leq 2c_2^2$. Siden $b(t) > 0$ for alle $c_2 \leq t \leq \sqrt{2}c_2$ ser vi at vektorfeltet er utoverpekende og åpenbart normaliserende. Se figuren under.



Deretter ser vi at $f_s^{\sigma^2 V}$ oppfyller egenskap 9 i avsnitt 9.6.1 for normen $\|-\|_s$. Deretter kan vi gjenta argumentet i det samme avsnittet for å vise påstanden.

Vi husker at ρ var selvavbildningen på $\mathbb{R}^{2m+2}$ som reverserte ordningen på vektorene i standardbasisen. Derfor følger det at dersom $(x,(u,v),y) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{2m} \oplus \mathbb{R}$, vil $\rho(x,u,v,y) = (y, \rho(u,v), x)$. Av dette er det lett å se at $h_s \circ (\rho \times \iota) = h_s$. Siden resten av feltet er konstant under deformasjonen er familien kompatibel med involusjonen.

□

I det glatte tilfellet er partisjonen $\sigma^2(rtV)$ utstyrt med et normaliserende vektorfelt på $J \times J^{2m} \times J \times I$. Betegn dette feltet ved (v_1, v_2, v_3, v_4), og normalfeltet til $rt(V)$ på $J^{2m} \times I$ ved (ξ^V, h) som før. Dersom vi setter $z = (u,v)$, er i følge definisjon 15, side 53 feltet gitt ved

$$
\begin{aligned}
v_1(x,z,y,t) &= \tilde{\alpha}^{m,n+1}_{r+3}(z,y) \cdot \Big(- f_1(x) + f_2(x)\Big) \\
v_2(x,z,y,t) &= H_1(x,z,y,t) \cdot \xi^V(z,t) + \beta_2(x)\beta_2(y)\big(x^2 - y^2\big) \cdot \tilde{g}^{m,n}_{r+3}(z) \\
v_3(x,z,y,t) &= \tilde{\alpha}^{m+1,n}_{r+3}(x,z) \cdot \Big(f_1(y) - f_2(y)\Big) \\
v_4(x,z,y,t) &= H_1(x,z,y,t) \cdot h(z,t) + 1 - \beta_1(x)\beta_1(y)
\end{aligned}
$$

Funksjonene $H_1, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{g}$ og f ble definert i kapittel 7. Det første vi ønsker å gjøre er å erstatte v_4 med $v_4' = h_0$. Dette kan vi gjøre ved lineærinterpolasjon. Vi har sett at h_0 er kompatibel med involusjonen, og en lineærkombinasjon av to kompatible felt er igjen kompatibelt. Spørsmålet er selvsagt hvorfor dette gir en normaliserende familie vektorfelt på den konstante familien av partisjoner $\sigma^2(rtV)$. Dette sjekkes ved å innse at (v_1, v_2, v_3, v_4') gir en normalisering av $\sigma^2(rtV)$.

Vi ser først at vektorfeltet (v_1, v_2, v_3) på $J \times J^{2m} \times J$ er en normalisering av $\partial P^0_{\sigma^2 V}$ og $\partial P^0_{(\sigma^2 V)^\perp}$. Dette betyr at vektorfeltet (v_1, v_2, v_3, v_4') normaliserer $Q^0(V)$. Siden $\sigma^2(rtV)$ og $Q^0(V)$ sammenfaller over $(int\ J_1) \times J^{2m} \times (int\ J_1) \times I$, følger det at vektorfeltet er normalt på dette området. For punkter $(x, z, y, t) \notin (int\ J_1) \times J^{2m} \times (int\ J_1) \times I$, vises normalitet nøyaktig som i diskusjonen på side 50.

Etter å ha byttet ut v_4-leddet, er vi i den situasjonen at vektorfeltet normaliserer både $\sigma^2(rtV)$ og $Q^0(V)$. Da kan vi danne en 1-parameter familie vektorfelt som er konstant lik (v_1, v_2, v_3, v_4'). Denne familien vil da være normal til hver partisjon i familien definert ved å senke og heve høyden på partisjonen over områdene K_1 og K_2, som er den første deformasjonen i proposisjon 2. Etter deformasjonen, sitter vi igjen med partisjonen $Q^0(V)$ og normalfeltet (v_1, v_2, v_3, v_4'). Nå som vi har kvittet oss med kantene helt ute med randen, kan vi trygt fjerne $\tilde{g}^{m,n}_{r+3}$-leddet fra normaliseringen ved en interpolasjon. Feltet ser da ut som

$$\begin{aligned}
v_1(x, z, y, t) &= \tilde{\alpha}^{m,n+1}_{r+3}(z, y) \cdot \Big(- f_1(x) + f_2(x)\Big) \\
v_2'(x, z, y, t) &= H_1(x, z, y, t) \cdot \xi^V(z, t) \\
v_3(x, z, y, t) &= \tilde{\alpha}^{m+1,n}_{r+3}(x, z) \cdot \Big(f_1(y) - f_2(y)\Big) \\
v_4'(x, z, y, t) &= h_0(x, z, y, t)
\end{aligned}$$

Vektorfeltet (v_1, v_2', v_3) på J^{2m+2} er fremdeles en normalisering av $\partial P^0_{\sigma^2 V}$ og $\partial P^0_{(\sigma^2 V)^\perp}$. Ved en ny lineærinterpolasjon bytter vi så dette feltet med $\xi^{\sigma^2 V}$ definert tidligere. Dette er som sagt før kompatibelt med involusjonen.

Under den andre og siste deformasjonen i proposisjonen, går vi fra partisjonen $Q^0(V)$ til $Q^1(V) = rt(\sigma^2 V)$. At denne kan normaliseres er innholdet i lemma 15.

Konklusjonen er at det finnes en kjede av 1-parameter familier av normaliserende vektorfelt som sammen med de tilsvarende to familiene partisjoner utgjør en vei fra $\sigma^2(rtV)$ til $rt(\sigma^2 V)$ som utgjør homotopien.

10 Avslutning

Vi vil nå samle trådene, og gi konklusjonen så langt. I avsnitt 9.1 definerte vi $\underset{m,\sigma^2}{Tel}\ G_m$ som modell for BO, det klassifiserende rommet til den uendelige reelle ortogonale gruppen O. (Se også [8].) I det differensiable tilfellet kan vi ved hjelp av proposisjon 2 danne tubeavbildningen

$$\underset{m}{Tel}\ (rt, F^m) : \underset{m,\sigma^2}{Tel}\ G_m \longrightarrow \underset{m,\sigma^2}{Tel}\ T^{m,m}$$

som vi betegner med $rt : BO \longrightarrow T^{DIFF}$. Da har vi følgende konsekvens av forrige kapittels diskusjon:

Korollar 3 *Avbildningen rt kommuterer med τ.*

Bevis: Involusjonen på teleskopet $\underset{m,\sigma^2}{Tel}\ G_m$ er indusert av involusjonen på $\coprod_{m\geq 1}[m, m+1]\times G_m$ gitt ved $id\times\tau$ og tilsvarende for $\underset{m,\sigma^2}{Tel}\ T^{m,m}$. Da følger det fra proposjon 2 og addendumet at $\underset{m}{Tel}\ (rt, F^m)$ er kompatibel med involusjonen.

$\square$

Gevinsten av de siste kapitlers arbeid er todelt. For det første har vi nå konstruert et rom av partisjoner som er stabilisert med hensyn på begge stabiliseringsavbildningene. Videre er disse rommene utstyrt med en ekte involusjon τ. Det er klart at den doble stabiliseringen er kompatibel med alle avbildningene som opptrer i teoremene 3 og 4. Dette er lett å sjekke siden alle disse er indusert av inklusjoner. Vi har derfor en forbedret utgave av teorem 3:

Teorem 6 *La X være en kompakt CAT-mangfoldighet. Diagrammet*

$$\begin{tikzcd}
\underset{m,\sigma^2}{Tel}\ P_k^m(J^m\times X\times J^m) \arrow[r] \arrow[d] & \underset{m,\sigma^2}{Tel}\ hP_k^m(J^m\times X\times J^m) \arrow[d] \\
\underset{m,\sigma^2}{Tel}\ (\underset{k}{Tel}\ P_k^m(J^m\times X\times J^m)) \arrow[r] & \underset{m,\sigma^2}{Tel}\ (\underset{k}{Tel}\ hP_k^m(J^m\times X\times J^m))
\end{tikzcd}$$

er homotopikartesisk for alle $k\geq 0$.

La $G(m)$ være rommet av avbildninger $f : S^m \xrightarrow{\simeq} S^m$ som er homotopiekvivalenser. Vi ser med andre ord på rommet av selvavbildninger på m-sfæren som har grad ± 1. Dette rommet har en H-romsstruktur ved komposisjon av avbildninger. Ved suspensjon kan vi stabilisere $G(m) \longrightarrow G(m+1)$, og vi betegner grensen med G. En modell for det klassifiserende rommet til G kan oppnås ved å ta bar-konstruksjonen på G. I [10] påstås det at $hP_1^m(D^{n+m})$ er ekvivalent med BG i et stabilt område avhengig av n og m. Dette betyr at det finnes en avbildning $hP_1^m(D^{n+m}) \longrightarrow BG$ som er en isomorfi på homotopigrupper $\pi_k hP_1^m(D^{n+m}) \xrightarrow{\cong} \pi_k BG$ for $k < N(m,n)$, der N er et tall som går mot uendelig med m og n. Vi har vist at våre rom av partisjoner er homotopiekvivalente med Waldhausens, og vi kan derfor ta $\underset{m,\sigma^2}{Tel}\ hP_1^m(J^{2m})$ som modell for BG.

La nå $CAT = DIFF$. Tubeavbildningen rt definert i forrige kapittel, er opplagt homotop med Waldhausens tilsvarende avbildning. Se [10], proposisjon 3.2. Ved å tenke på den simplisielle mengden $P_1^m(J^{2m})$ som objektene i den simplisielle kategorien $hP_1^m(J^{2m})$, får vi indusert en avbildning $T^{DIFF} \longrightarrow BG$. Setter man denne sammen med tubeavbildningen, får man derfor en avbildning $BO \longrightarrow BG$ som er i samme homotopiklasse som den beskrevet i proposisjon 3.2 i [10]. Men i denne proposisjonen påstås det at dette igjen er en avbildning som er i samme homotopiklasse som den kjente J-avbildningen $BJ : BO \longrightarrow BG$. Vi har med andre ord valgt modeller for BO, BG og BJ slik at $BJ : BO \longrightarrow BG$ kommuterer med involusjonen på disse modellene.

Vi husker at vi valgte rommet $P_0^m(X)$ som modell for h-kobordismerommet over X, som gjerne betegnes med $H(X)$. Vår modell for $\mathcal{H}^{DIFF}(X)$, det stabile h-kobordismerommet over X, er derfor $\underset{m,\sigma^2}{Tel}\ P_0^m(J^m \times X \times J^m)$.

Teorem 7 *Følgende er en fibrering opp til homotopi for alle $k \geq 0$:*

$$\mathcal{H}^{DIFF}(X) \longrightarrow \underset{m,\sigma^2}{Tel}\ P_k^m(J^m \times X \times J^m) \longrightarrow \underset{m,\sigma^2}{Tel}\ hP_k^m(J^m \times X \times J^m)$$

Bevis: Beviset følger ved nøyaktig samme argument som ble brukt i beviset av teorem 5.

□

For $X = *$ restrikterer involusjonen på $P(J^m \times X \times J^m) = P(J^{2m})$ seg til en involusjon på $P_k^m(J^m \times X \times J^m) = P_k^m(J^{2m})$. For $k = 1$ får teoremet over følgende pene form:

Korollar 4 *Vi har en fibrering opp til homotopi*

$$\mathcal{H}^{DIFF}(*) \longrightarrow T^{DIFF} \longrightarrow BG$$

hvor avbildningene kommuterer med involusjonen.

Det er kjent at homotopifiberen til J-avbildningen er homotopiekvivalent med rommet G/O. Siden komposisjonen $BJ : BO \xrightarrow{rt} T^{DIFF} \xrightarrow{inkl.} BG$ er i samme homotopiklasse som J-avbildningen $BO \longrightarrow BG$, følger det at homotopifibrene er homotopiekvivalente, og vi velger homotopifiberen til BJ som modell for G/O.

Med de valgene vi har gjort av modeller for $BO, BG, \mathcal{H}^{DIFF}(*)$ og G/O kan følgende korte oppsummering gis:

Teorem 8 *Det eksisterer kommutativt diagram*

$$\begin{tikzcd} G/O \arrow[r] \arrow[d] & BO \arrow[r, "BJ"] \arrow[d, "rt"] & BG \arrow[d, "="] \\ \mathcal{H}^{DIFF}(*) \arrow[r] & T^{DIFF} \arrow[r] & BG \end{tikzcd}$$

De horisontale følgene er fibreringer opp til homotopi, og alle avbildningene kommuterer med involusjonen τ.

En måte å se dette på er at den øverste fibreringen opp til homotopi er en involutiv approksimasjon til den nederste. Hvor god er denne approksimasjonen? Bökstedt [2] har vist at avbildningen $G/O \longrightarrow \mathcal{H}^{DIFF}(*)$ er en rasjonal ekvivalens. Videre har Rognes [7] en utregning som viser at 2-lokalt er avbildningen 8-sammenhengende. Det følger at tubeavbildningen også har disse egenskapene.

A Fikspunktene til $\tau : BO \longrightarrow BO$

Det er kjent at den reelle, ortogonale gruppen $O(2m)$ virker transitivt på $Gr_m(\mathbb{R}^{2m})$. Isotropiundergruppen til planet utspent av de m første vektorene i standardbasisen til $\mathbb{R}^{2m}$ er lik

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \middle| A, B \in O(m) \right\} = O(m) \times O(m)$$

som undergruppe av blokkmatriser i $O(2m)$. Vi kan derfor identifisere $Gr_m(\mathbb{R}^{2m})$ med kvotienten $\frac{O(2m)}{O(m) \times O(m)}$. La nå $T = (t_{ij})$ være matrisen med

$$t_{ij} = \begin{cases} 1 & i + j = 2m + 1 \\ 0 & ellers \end{cases}$$

Da er $T \in O(2m)$, $T^{-1} = T$, og vi får en involusjon på $O(2m)$ ved å konjugere med $\tilde{\tau}(A) = T \cdot A \cdot T^{-1} = T \cdot A \cdot T$. Videre ser vi at $\tilde{\tau}$ respekterer undergruppen $O(m) \times O(m)$, og induserer defor en involusjon $\tilde{\tau}'$ på $Gr_m(\mathbb{R}^{2m})$ ved formelen $\tilde{\tau}'[A] = [\tilde{\tau} A]$, for $A \in O(2m)$.

Ved å sjekke hva $\tilde{\tau}'$ gjør med en matrise, ser vi lett at $\tilde{\tau}' = \tau$, vår gamle involusjon på $Gr_m(\mathbb{R}^{2m})$.

Virkningen av $\mathbb{Z}/2$ på $Gr_m(\mathbb{R}^{2m})$ gitt ved τ, er ikke fri. Planet utspent av de m første standardbasisvektorene er for eksempel et fikspunkt. Men hvordan ser fikspunktene ut generelt? Det viser seg at fikspunktene er en kjent Lie-gruppe.

La oss betegne fikspunktmengden til τ på $Gr_m(\mathbb{R}^{2m})$ med $Gr_m(\mathbb{R}^{2m})^{\mathbb{Z}/2}$, og fikspunktmengden til $\tilde{\tau}$ på $O(2m)$ med $O(2m)^{\mathbb{Z}/2}$. Det er klart at $O(2m)^{\mathbb{Z}/2}$ er en undergruppe av $O(2m)$, og virker derfor på $O(2m)$. Men dersom $A \in O(2m)^{\mathbb{Z}/2}$, vil

$$\tau([M] \cdot A) = \tau[M \cdot A] = [T \cdot M \cdot A \cdot T] = [T \cdot M \cdot T \cdot A] = (\tau[M]) \cdot A$$

som viser at $O(2m)^{\mathbb{Z}/2}$ også virker på $Gr_m(\mathbb{R}^{2m})^{\mathbb{Z}/2}$. Da har vi følgende lemma:

Lemma 16 *Virkningen av $O(2m)^{\mathbb{Z}/2}$ på $Gr_m(\mathbb{R}^{2m})^{\mathbb{Z}/2}$ er transitiv.*

Bevis: Anta at $[M] \in Gr_m(\mathbb{R}^{2m})^{\mathbb{Z}/2}$. Vi ønsker da å finne en $A \in O(2m)^{\mathbb{Z}/2}$ slik at $[A] = [M]$. At $[M]$ er et fikspunkt betyr at $[M] = [T \cdot M \cdot T] \Leftrightarrow M \cdot B =$

$T\cdot M\cdot T$. ($B \in O(m)\times O(m)$.) Men la da $1 \leq i \leq m$.

$$\begin{aligned} 0 &= \langle e_i, B\cdot e_{2m-i+1}\rangle \\ &= \langle M\cdot e_i, M\cdot B\cdot e_{2m-i+1}\rangle \\ &= \langle M\cdot e_i, T\cdot M\cdot T\cdot e_{2m-i+1}\rangle \\ &= \langle M\cdot e_i, T\cdot M\cdot e_i\rangle \end{aligned}$$

Dette betyr at dersom vi danner matrisen

$$A = \Big[M\cdot e_1\Big|\dots\Big|M\cdot e_m\Big|T\cdot M\cdot e_m\Big|\dots\Big|T\cdot M\cdot e_1\Big]$$

så vil $A \in O(2m)^{\mathbb{Z}/2}$. Dessuten vil $[M] = [A]$, siden de m første søylene i A er de samme som de m første i M hvilket betyr at de bestemmer det samme planet i $Gr_m(\mathbb{R}^{2m})$.

$\square$

Vi ser videre at isotropiundergruppen til $[I]$ er lik

$$\Big\{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & T\cdot A\cdot T\end{pmatrix}\Big| A \in O(m)\Big\} \tag{10}$$

Betegn denne undergruppen med $O(m)' \subset O(2m)$. Det klart at $O(m)' \cong O(m)$, og vi har følgende isomorfier:

$$Gr_m(\mathbb{R}^{2m})^{\mathbb{Z}/2} \cong \Big[\frac{O(2m)}{O(m)\times O(m)}\Big]^{\mathbb{Z}/2} \cong \frac{O(2m)^{\mathbb{Z}/2}}{[O(m)\times O(m)]^{\mathbb{Z}/2}} \cong \frac{O(2m)^{\mathbb{Z}/2}}{O(m)'} \tag{11}$$

Oppgaven blir derfor å gjenkjenne gruppen $O(2m)^{\mathbb{Z}/2}$ og undergruppen $O(m)'$. Gruppen $O(2m)^{\mathbb{Z}/2}$ består av alle ortogonale matriser A slik at $T\cdot A\cdot T = A$.

La nå C være den ortogonale matrisen $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & -T \\ T & I\end{pmatrix}$. Da definerer vi $I' := C\cdot T\cdot C^{-1} = C\cdot T\cdot C^t = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix}$. Ved å sende $A \mapsto C\cdot A\cdot C^{-1}$ får vi en basisskifteautomorfi ϕ på $O(2m)$. La oss betegne bildet av $O(2m)^{\mathbb{Z}/2}$ med $G(2m)$. Da er

$$G(2m) = \Big\{B \in O(2m)\Big| I'\cdot B\cdot I' = B\Big\}$$

Dersom vi skriver $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4\end{pmatrix}$, er det lett å se at betingelsen $I'\cdot B\cdot I' = B$ medfører at $B_2 = -B_2$ og $B_3 = -B_3$. Vi har derfor vist

Proposisjon 3

$$G(2m) = O(m) \times O(m) \subset O(2m)$$

For å gjenkjenne bildet av $O(m)'$ under ϕ, er det bare å regne ut:

$$C \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & TAT \end{pmatrix} C^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & -T \\ T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & TAT \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & T \\ -T & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & TAT \end{pmatrix}$$

hvilket betyr at ϕ restrikterer til identiteten på $O(m)'$. Da har vi følgende beskrivelse av fikspunktene i Grassmannen:

Proposisjon 4 *Underrommet av fikspunkter til $\mathbb{Z}/2$-virkningen på $Gr_m(\mathbb{R}^{2m})$ gitt ved involusjonen τ er homoemorft med $O(m)$.*
Stabilt er derfor $BO^{\mathbb{Z}/2} \cong O$.

Bevis: Ved isomorfiene i (11) og basisskifteisomorfien ϕ , har vi at

$$Gr_m(\mathbb{R}^{2m})^{\mathbb{Z}/2} \cong \frac{O(2m)^{\mathbb{Z}/2}}{O(m)'} \xrightarrow{\cong} \frac{O(m) \times O(m)}{O(m)'}$$

Vi husker at $O(m)' \subset O(m) \times O(m)$ var undergruppen beskrevet i (10). La $j : O(m) \times O(m) \longrightarrow O(m)$ være homomorfien $(A, B) \mapsto A \cdot T \cdot B^{-1} \cdot T$. Da er j surjektiv, og kjernen er nøyaktig $O(m)'$, så j induserer en isomorfi $\frac{O(m) \times O(m)}{O(m)'} \cong O(m)$.

$\square$

Referanser

[1] D. Burghelea, R. Lashof. *The homotopy type of the space of diffeomorphisms*, I, II, Trans. A.M.S. 196, 1974, pg. 1-50.

[2] M. Bökstedt. *The rational homotopy type of* $\Omega Wh^{DIFF}(*)$, Proc. Algebraic Topology, Aarhus 1982 (I. Madsen and B. Oliver, eds.), Lect. Notes Math. vol. 1051, Springer-Verlag, 1984, pg. 25-37.

[3] A. Hatcher *Concordance spaces, higher simple homotopy theory, and applications*, Proc. of Symposia in Pure Mathematics, Vol. 32, 1978.

[4] J. Hudson, E. Zeeman. *On combinatorial isotopy*, Publ. Math. I.H.E.S. no. 19, 1964.

[5] R. Kirby, L. Siebenmann. *Foundational essays on Topological manifolds, Smoothing and Triangulations*, Annals of Mathematics, Studies 88, Princeton University Press, 1977.

[6] A. Kosinski. *Differential Manifolds*, Academic Press, 1993.

[7] J. Rognes. *Two-primary algebraic K-theory of pointed spaces*, Preprint Series in pure mathematics, University of Oslo, no.1, January 1999.

[8] R. Switzer. *Algebraic Topology - Homotopy and Homology*, Springer-Verlag, 1975.

[9] W. Vogell, ?

[10] F.Waldhausen. *Algebraic K-theory of spaces, A manifold approach*, Canadian Mathematical Society, Conference Proceedings, Volume 2, Part 1, 1982.