Kan vi forutse en pendels bevegelse, før vi har satt den i sving?

Skrevet av: Kristian Sørnes

Dette eksperimentet ser på hvordan man finner en matematisk formel fra et eksperiment, og hvordan pendler kan hjelpe oss med å beregne tyngdekraften på Jorda. Eksperimentet følger samme fremgangsmåte som Gelileo Galilei da han fant en matematisk formel for pendelens svingetid basert på eksperimentelle målinger.

Biologi	Kjemi	Fysikk	Elektronikk	Informatikk	Matematikk
○○○○○	○○○○○	●●●○○	○○○○○	○○○○○	●●○○○

Introduksjon

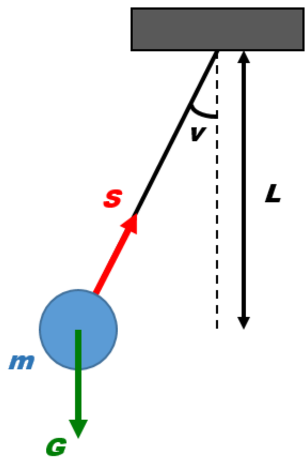
En pendel er en enkel innretning. Det er en gjenstand festet med en snor til et fast punkt. Pendelens viktigste egenskap er dens evne til å svinge fram og tilbake, som en huske i skolegården. For å beskrive bevegelsen matematisk må vi finne ut hvilke faktorer denne er avhengig av. Da kan vi gjøre eksperimenter og finne en formel fra måledataene. Vi skal også bruke denne formelen til å beregne tyngdeakselerasjonen, *g*. Andre måter å beregne *g* er tidligere beskrevet av Stølen i ref. [1].

Teori

Når vi studerer en pendel er det gjenstanden i enden av snora vi forholder oss til. Den har en masse, *m,* som vi måler i gram, og blir dratt mot bakken av tyngdekraften, *G*. Gjenstanden blir også dratt oppover av snoren, ellers ville den falt rett ned i bakken. Vi kaller denne kraften som holder igjen gjenstanden for *S*. At disse to kreftene ikke fullstendig motvirker hverandre gjør at pendelen begynner å svinge. Når pendelen svinger blir den også påvirket av luftmotstand som til slutt får den til å stoppe. Fordi det ikke er luft på Månen, ville en pendel der ha fortsatt å svinge mye lenger enn på Jorda.

Matematikken fungerer best når det er få ting å forholde seg til. Det er derfor vanlig å forenkle bort faktorer som det er vanskelig å regne på, og som nesten ikke påvirker systemet. Den ene er å anta at snoren er masseløs, altså at den ikke veier noe. Pendelens masse er da bare gjenstanden sin masse. En annen forenkling er å se bort ifra luftmotstanden; den er viktig når objektet vi studerer beveger seg fort (f.eks. et fly), men for lave hastigheter har den lite å si.

Fordi vi forenkler er ikke formelen vi finner helt eksakt, men den hjelper oss å forutse hva som vil skje dersom vi endrer oppsettet litt uten at vi trenger å gjøre eksperimentet.



Figur 1: En skisse av kreftene som virker på en kule med masse *m*. Tyngdekraften *G* virker ned mot Jorda, mens kraften *S* virker opp langs snoren. Snoren har en lengde *L*, og pendelen står en vinkel *v* fra loddlinjen.

For å undersøke om eksperimentelle målinger følger en matematisk formel endrer man én variabel, holder alt annet konstant og ser om sluttresultatet endrer seg. Ingen endring betyr at sluttresultatet og variabelen er uavhengige.

Hensikt

I dette forsøket skal vi følge i fotsporene til den kjente fysikeren Galileo Galilei (1564-1642), som fant en matematisk formel for pendelens svingetid basert på eksperimentelle målinger [2]. Vi definerer svingetid som tiden pendelen bruker på å svinge fram og tilbake én gang.

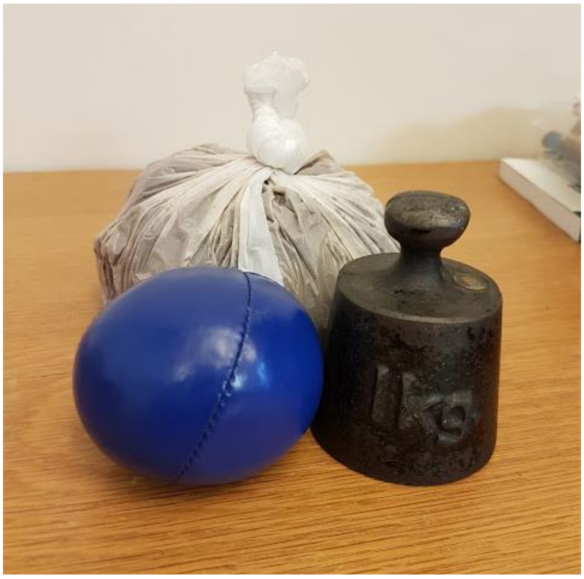
Galileo undersøkte tre variabler og deres sammenheng med svingetiden:

- *m,* massen til gjenstanden
- *v,* vinkelen til pendelen ved start
- *L,* lengden til snoren.

Det er disse vi også skal variere i vårt forsøk.

Utstyr

- Gjenstander av ulik masse.
  Vi brukte:
- En sjongleringsball (125 g)
- En plastpose
- fylt med pulverkaffe (303 g)
- Et kilolodd (1003 g)
- Hyssing (eller lignende)
- Målebånd eller linjal
- Vanlig kjøkkenvekt
- Teip eller tusj (til markering)
- Gradskive
- Saks
- Stoppeklokke

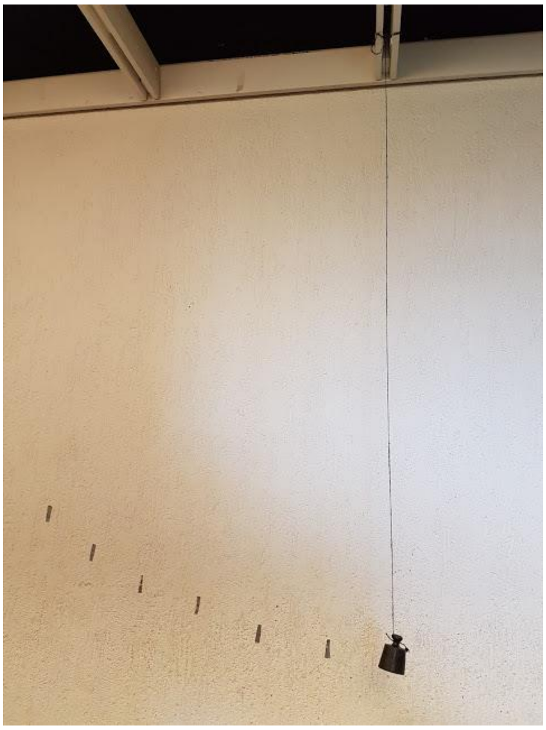


Figur 2: De tre gjenstandene vi brukte.

Gjennomføring

Vei et utvalg av gjenstander som skal brukes som pendler, og fest den første til et horisontalt festepunkt. Knyt godt fast; det er viktig at festepunktet holdes i ro. Pendelen må også kunne svinge uten å kollidere med noe. Marker på en bakgrunn hvor pendelen befinner seg mens den henger rett ned.

I følge teoridelen vil luftmotstanden ha lite å si så lenge farten holdes lav. Likevel kan det være lurt å bruke gjenstander som alle har samme form, da dette også påvirker luftmotstanden. Ideelt skal kun massen være forskjellig.



Figur 3: Oppsettet vi brukte. Loddet er festet til takbjelken med hyssing. Bitene med teip på veggen markerer hvor pendelen befinner seg ved ulike vinkler. Bak loddet er det en siste teipbit som markerer der pendelen henger i ro.

Dra pendelen et lite stykke til siden, og marker dette startpunktet. Mål tiden fra pendelen blir sluppet til den er tilbake ved startpunktet. Utfør gjerne flere målinger på ett forsøk, men etter hvert vil ikke pendelen lenger nå opp til startpunktet. Da er ikke startvinkelen *v* den samme som før, og man må sette i gang pendelen på nytt. Noter alle svingetidene.

Variasjon av masse

Mål svingetiden til en pendel av hver gjenstand; pass på at lengden holder seg lik, og startpunktet er det samme.

Variasjon av vinkel

Marker ulike startpunkter på bakgrunnen, og noter vinkelen ved hver av disse. Mål svingetiden fra hver vinkel, men hold masse og lengde konstant.

Variasjon av lengde

Bruk samme gjenstand hver gang, men varier lengden på snoren. Slipp alle pendlene fra samme vinkel, og mål svingetiden.

I vårt eksperiment ble totalt 15 pendler undersøkt: tre med ulik masse, seks med ulik startvinkel, og seks med ulik lengde. Hver pendel hadde 22 målinger av svingetid. Med så mange målinger lønner det seg å jobbe videre med gjennomsnitt, slik at eventuelle målefeil noenlunde motvirkes. Husk at lengden på pendelen er frem til midten av loddet (massesenteret) og ikke bare lengden på tråden.

Tabell 1: Oversikt over alle verdien vi testet. Til sammen hadde vi 15 pendler, én for hver verdi. For hver pendel i en søyle ble de to andre variablene holdt konstante.

Masse	Vinkel	Lengde
m [g]	*v*	*L* [cm]
125	5°	9
303	10°	24
1003	15°	48
	20°	100
	25°	163
	30°	203

Resultater

Resultatene våre finnes i tabellene under. Svingetiden har fått symbolet *T,* og verdiene er gjennomsnitt. Tabell 2 viser ulik masse, tabell 3 ulik vinkel og tabell 4 ulik lengde på snoren.

Tabell 2: Resultat fra endring av masse. Startvinkelen *v* var 10°, lengden av snoren *L* var 163 cm.

m [g]	*T* [s]
125	2,58
303	2,63
1003	2,60

Tabell 3: Resultat fra endring av vinkel. Massen til gjenstanden *m* var 1003 g, lengden av snoren *L* var 1.63 m.

v	*T* [s]
5°	2,59
10°	2,60
15°	2,61
20°	2,62
25°	2,63
30°	2,64

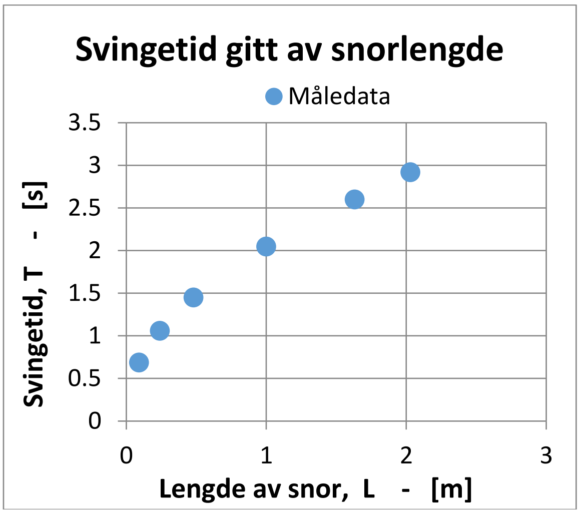
Tabell 4: Resultat fra endring av lengde. Massen til gjenstanden *m* var 1003 g, startvinkelen *v* var 10°.

L [m]	*T* [s]
0,09	0,69
0,24	1,06
0,48	1,45
1,00	2,05
1,63	2,60
2,03	2,92

Diskusjon

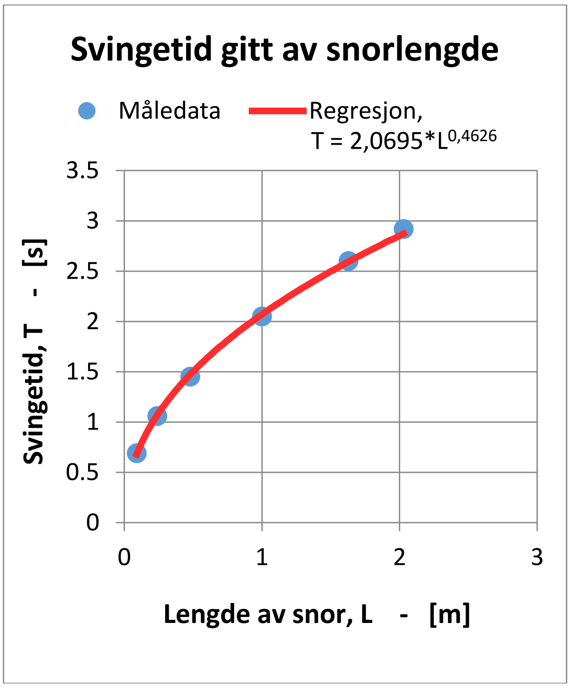
Tabellene 2 og 3 viser at hverken masse eller startvinkel har en betydelig innvirkning på pendelens svingetid. I begge tabellene er den største forskjellen 0,05 s, under 2% av gjennomsnittsverdien på 2,6 s. Selv innad i ett datasett for én pendel er forskjellene større enn 0.05 s.

Tabell 4 viser derimot at svingetiden øker når lengden av snoren øker, altså er det en matematisk sammenheng mellom de to. Vi plotter dataene for å illustrere dette bedre i figur 4:



Figur 4: Plott av verdiene for svingetid opp mot lengden av snora.

Med seks punkter kan det være vanskelig se hva slags matematisk funksjon som ligger bak resultatene. Galileo ville hatt langt flere punkter å gå etter, og en del mer kunnskap om funksjoner. Vi kan heldigvis bruke regresjon i regneprogram som Excel til å finne funksjonen som passer best med dataene. I dette tilfellet er det følgende:



Figur 5: Regresjonen som passer best med de målte verdiene.

Fra figur 5 har vi at

$$T = 2,0695 \cdot L^{0,4626}$$

Siden $0,4626 \approx 0,5$ kan vi runde opp, og vi vet at

$$L^{0,5} = \sqrt{L}$$

Dette gir

$$T \approx k\sqrt{L}$$

der *T* er pendelens svingetid, *L* er snorlengden og *k* er en konstant med verdi 2,0695. *k* har en enhet, men vi lar den utebli for øyeblikket. Vi har altså vist at svingetiden til en pendel er omtrent lik en konstant ganget med kvadratroten til snorlengden. Dette var nøyaktig det Galileo fant ut, allerede på 1600-tallet.

Noen år etter Galileos tid uttrykte Isaac Newton (1635-1703) tyngdekraften *G* på Jordas overflate som en formel:

$$G = mg$$

der *m* er en gjenstands masse og *g* er tyngdeakselerasjonen, en konstant verdi. Med dagens teknologi kan vi bestemme *g*; verdien vi bruker er 9.81 m/s^2.

Med et uttrykk for tyngdekraften *G* kan vi i dag bruke matematikk til å beskrive pendelens bevegelse. Uten at vi går for mye inn på det her, skal vi se nærmere på et interessant resultat.

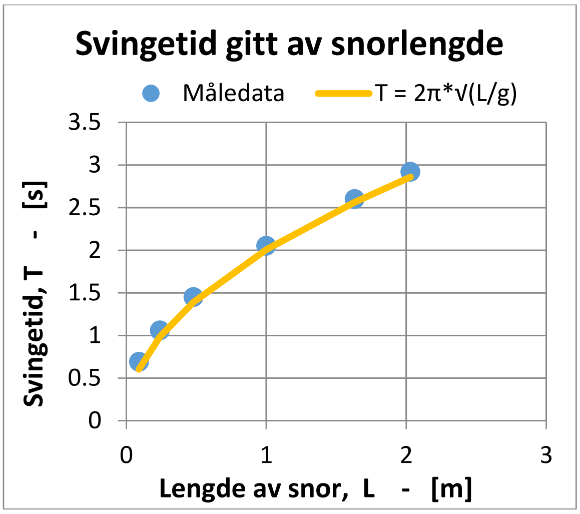
En pendel som henger i en masseløs snor fra et festepunkt som ikke beveger seg, og som ikke bremses av luftmotstand eller friksjon, har for små startvinkler en svingetid *T* gitt ved

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

der *L* er snorens lengde og *g* er tyngdeakselerasjonen. Alternativt kan vi skrive dette som:

$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{L}$$

Dette siste uttrykket ligner veldig på uttrykket vi fant fra regresjonen; en konstant, ganget med kvadratroten av lengden til snoren. Vi plotter dette uttrykket sammen med måledataene og ser om de passer. Figur 4 illustrerer hvordan den matematiske formelen følger våre måledata svært nøyaktig.



Figur 6: Analytisk resultat fra matematikken sammenlignet med våre måledata.

Vi kan derfor sette det matematiske formelen og vår formel tilnærmet lik hverandre:

$$T \approx \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{L}$$

$$\text{fordi } T \approx k\sqrt{L}, \qquad \text{er } k \approx \frac{2\pi}{\sqrt{g}}$$

Fra dette kan vi beregne tyngdeakselerasjonen g fra våre egne måledata. Skriver vi om ligningene over, får vi formelen

$$g \approx \frac{4\pi^2}{k^2} \qquad \text{evt.} \qquad g \approx \frac{4\pi^2 L}{T^2}$$

Bruker vi verdien for k fra regresjonen, har vi at

$$g \approx \frac{4\pi^2}{\left(2,0695 \frac{\mathrm{s}}{\sqrt{\mathrm{m}}}\right)^2} = 9,22 \; \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

som har et avvik på 6 % fra den virkelige verdien. Ikke verst for en hjemmelagd pendel! Det er mulig å finne enkelte datapunkter som ligger nærmere den reelle verdien til g, men det blir ikke rett behandling av statistikk å plukke disse verdiene.

Konklusjon

I dette forsøket kom vi til de samme konklusjonene som det Galileo selv gjorde. Hverken massen til gjenstanden eller startvinkelen hadde noen innvirkning på pendelens svingetid. Det hadde derimot lengden av snoren, og ved hjelp av regresjon fant vi et omtrentlig uttrykk gitt ved

$$T \approx k\sqrt{L} \quad \text{der} \quad k = 2,0695 \; \frac{\mathrm{s}}{\sqrt{\mathrm{m}}}$$

Når vi etter hvert så sammenhengen mellom dette uttrykket og tyngdens akselerasjon g, klarte vi å tilnærme verdien til

$$g \approx 9,22 \; \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

som er 94 % av den virkelige verdien. Nå har det seg slik at pendelen vår ikke oppfyller alle antakelsene som matematikken er avhengig av; som masseløs snor og luftmotstand lik null. Det er slike feilkilder som gjør at verdien blir litt feil. Likevel illustrerer dette forsøket hvordan vi finner verdien av slike konstanter som g: vi setter opp eksperimenter som nesten oppfyller alle antakelsene, og får ut et ganske riktig tall fra formelen. Allerede på 1600-tallet hadde man svært gode tilnærminger for g, lenge før elektroniske sensorer og satellitter kunne hjelpe oss med målingene.

Prøv dette hjemme

Hvilke andre formler kan man finne med denne metoden? Hva annet har man klart å finne ved hjelp av pendler? Hvordan tror du en bestefarklokke fungerer?

Referanser

[1] Rune Stølen, Tyngdeakselerasjon i Gjør Dette Hjemme 2016 #003
[2] https://no.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei